

Petit problème: Etude de sous-espaces stables par une application linéaire

Soit $n > 0$ un entier naturel et E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$. On note 0_E le vecteur nul de E et Id_E l'endomorphisme identité de E .

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est *stable* par un endomorphisme f de E si $f(F) \subset F$. On remarquera que le sous-espace vectoriel $\{0_E\}$ est stable par tout endomorphisme de F . On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour tout entier naturel k , par $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le degré est inférieur ou égal à k . Si f est un endomorphisme de E , on pose $f^0 = Id_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et de manière générale, pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f \circ f^k$. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on définit l'endomorphisme $P(f)$ de E en posant $P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k$.

Partie 1: Préliminaires

Soit f un endomorphisme de E .

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\text{Ker } P(f)$ est stable par f .
2. (a) Montrer que les droites vectorielles de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de f .
 (b) On note $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_c$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g .
3. Soit p un entier naturel non nul.
 - (a) On suppose que $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f . Montrer alors que la somme $\sum_{k=1}^p F_k$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f .
 - (b) On suppose que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de f et soient $n_1, n_2, \dots, n_p$ des entiers naturels. Montrer que la somme $\sum_{k=1}^p \text{Ker}(f - \lambda_k \text{id}_E)^{n_k}$ est stable par f .
4. (a) Soit λ un nombre réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda \text{id}_E$.
 (b) Montrer que tout sous-espace vectoriel stable par f est stable par l'endomorphisme f^2 . Que pensez-vous de la réciproque ?
 (c) On suppose dans cette question que f est un automorphisme de E . Montrer que tout sous-espace vectoriel stable par f est stable par f^{-1} . Que pensez-vous de la réciproque ?
 (d) On suppose dans cette question de f laisse stable toutes les droites vectorielles de E . Que peut-on en conclure ?
5. On rappelle qu'une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.
 - (a) Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux des formes linéaires non nulles sur E .
 - (b) Soit ϕ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \text{Ker } \phi$.
 - i. Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement s'il existe un élément $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\phi \circ f = \lambda \phi$.

- ii. On note A la matrice de f relativement à la base canonique $\mathcal{B}_c$ et L la matrice (ligne) de ϕ relativement aux bases canoniques de E et $\mathbb{R}$.
Montrer que l'hyperplan H de E est stable par f si et seulement si ${}^t A {}^t L = \lambda {}^t L$.
- iii. Déterminer les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme g défini à la question 2b.

Partie 2: Etude du cas où l'endomorphisme est diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme f de E diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $E_1, E_2, \dots, E_p$ les sous-espaces propres correspondants.

1. Que peut-on dire des sous-espaces vectoriels stables par f si $p = 1$?
2. On suppose que $p \geq 2$, et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f . Soit $x \in F$.
 - (a) Justifier l'existence d'un unique élément $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ tels que $x = \sum_{k=1}^p x_k$.
 - (b) Montrer que le vecteur $\sum_{k=2}^p (\lambda_k - \lambda_1) x_k \in F$.
 - (c) Montrer que les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ appartiennent à F .
3. Dédurre de la question précédente que les sous-espaces vectoriels de E stables par f sont exactement les sous-espaces vectoriels de la forme $\sum_{k=1}^p F_k$; où pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, F_k désigne un sous-espace vectoriel de E_k .
4. Montrer que l'endomorphisme induit par f sur l'un de ses sous-espaces vectoriels stables est un endomorphisme diagonalisable de F .
5. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les valeurs propres de f pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f .

Partie 3: Etude du cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre n

1. On désigne par D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui à tout polynôme P associe son polynôme dérivé P' .
 - (a) Donner la matrice de D dans le cas où $n = 4$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
 - (b) Justifier que $D^n = 0$ et que $D^{n-1} \neq 0$.
 - (c) Vérifier que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stables par D sont, en dehors du sous-espace vectoriel réduit au polynôme nul, les n sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X], \dots, \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
2. On note 0 l'endomorphisme nul de E et on considère un endomorphisme f nilpotent d'ordre n , c'est-à-dire vérifiant la condition $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
 - (a) Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base et préciser la matrice A de l'endomorphisme f dans cette base.
 - (b) Montrer alors que la matrice A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Déterminer les sous-espaces vectoriels de E stables par f .

Partie 4: Etude du cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2

Dans cette partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 de E , c'est-à-dire que $f \circ f = 0$.

- Soit F_2 un sous-espace vectoriel de E vérifiant $F_2 \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
 - Justifier que $f(F_2) \subset \text{Ker}(f)$.
 - On considère alors un sous-espace F_1 de $\text{Ker}(f)$ contenant $f(F_2)$.
Montrer que la somme $F_1 + F_2$ est directe et que c'est un sous-espace stable par f .
 - Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E . Etablir l'inclusion $(A \cap C) + (B \cap C) \subset (A + B) \cap C$.
A t'on nécessairement égalité entre ces deux ensembles ?
 - Montrer que $(F_1 + F_2) \cap \text{Ker}(f) = F_1$.
- Réciproquement soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f . On suppose que $F_1 = F \cap \text{Ker}(f)$ est soit F_2 un supplémentaire de F_1 dans F .
Vérifier l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset f(F)$ et prouver que $F_2 \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- Dans cette question, on pose $n = 4$ (soit $E = \mathbb{R}^4$). Soit h l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que les sous-espaces vectoriels $G_1 = \text{Ker}(h - \text{Id})^2$ et $G_2 = \text{Ker}(h - 2\text{Id})^2$ sont supplémenaires.
- Montrer que les sous-espaces vectoriels stables par f sont exactement les sommes $H_1 + H_2$ où H_1 et H_2 sont respectivement des sous-espaces vectoriels de G_1 et G_2 stables par h .
- Déterminer les sous-espaces vectoriels de E stables par h .

Partie 5: Existence d'un plan stable par un endomorphisme

On suppose à présent que $\dim(E) \geq 2$. Soit f un endomorphisme de E .

- Justifier l'existence d'un polynôme non nuls à coefficients réels annulant f .
Dans la suite, on note M un polynôme non nul à coefficients réels de plus bas degré annulant f . On remarquera que M n'est pas un polynôme constant.
- Dans cette question, on suppose que le polynôme M n'a pas de racines réelles et on note ω l'une de ses racines complexes.
 - Vérifier que $\bar{\omega}$ est aussi une racine de M et en déduire qu'il existe un polynôme du second degré à coefficients réels, que l'on note $X^2 + bX + c$ divisant M .
 - Démontrer que l'endomorphisme $f^2 + bf + c\text{Id}_E$ n'est pas injectif.
 - En déduire l'existence d'un plan de E stable par f .
- Dans cette question, on suppose qu'il existe un nombre réel λ , un nombre réel $\alpha \neq 0$ et un entier $p \geq 2$ tels que $M = \alpha(X - \lambda)^p$.

-
- (a) On pose $g = f - \lambda Id_E$.
Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, g(x), g^2(x), \dots, g^{p-1}(x))$ soit libre.
- (b) En déduire qu'il existe un plan de E stable par f .
4. Conclure que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie supérieur ou égale à 2 admet toujours un plan stable.