

Exercices d'intégration d'après Math'X TS

Exercice 1: Intégration par parties (exo 71 p. 252)

Partie A. Une formule générale

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I . On admet que les fonctions $u'v$ et uv' sont alors continues sur I .

1. Montrer que $u'v = (uv)' - uv'$.
2. En déduire que pour tout réels a et b de I , nous avons

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Partie B. Applications

1. Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_0^3 xe^x dx; \quad \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx; \quad \int_1^e \ln(x) dx$$

2. On pose, pour tout entier naturel n non nul $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx$.
Calculer I_1 et démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

En déduire le calcul de I_2 et I_3 .

Exo 2: Suites d'intégrales (exo 76 p. 253)

On donne $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ et $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1} dx$ pour tout entier naturel non nul.

1. Calculer I_1 et $I_0 + I_1$. En déduire I_0 .
2. Pour tout entier naturel n , calculer $I_{n+1} + I_n$.
3. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
4. Prouver que pour tout réel $x \in [0; 1]$,

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \leq \frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$$

5. En déduire un encadrement de I_n . Quelle interprétation de ces deux limites peut-on donner ?

Exercices d'intégration d'après Déclic TS

Valeurs approchées de e (exo 152 p. 221)

Soit $a > 0$. Pour tout entier naturel n , on pose f_n la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}; \quad C_n \text{ la courbe représentative de } f_n \text{ et } I_n = \int_0^a f_n(x) dx$$

1. Calculer $I_0(a)$.
2. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier $k \geq 1$,

$$f_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'_k(x) = f_{k-1}(x) - f_k(x)$$

En déduire que pour tout entier $k \geq 1$, $I_k(a) - I_{k-1}(a) = -\frac{a^k}{k!} e^{-a}$.

3. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}$$

4. Dans cette question, on prend $a = 1$. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on pose $u_n = I_n(1)$,

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) e^{-1}$$

- (a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \geq 0$. Donner une interprétation géométrique de u_n .
- (b) Montrer que pour tout entier naturel n , et pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \leq \frac{1}{n!} x^n$.
- (c) En déduire que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$. Quelle est la limite de la suite (u) ?
- (d) En déduire que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$.