

Correction Exercices d'intégration d'après Math'X TS

Exercice 1: Intégration par parties (exo 71 p. 252)

Partie A. Une formule générale

1. D'après la formule de la dérivée d'un produit, nous avons que $(uv)' = u'v + uv'$ d'où $u'v = (uv)' - uv'$.
2. Les fonctions u, v, u' et v' étant toutes continues sur $I = [a, b]$, nous en déduisons que les fonctions $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont intégrables sur $[a, b]$. Aussi nous avons en intégrant les deux membres de l'égalité précédente:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Partie B. Applications

1. • Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Alors nous avons $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. Aussi, par la formule d'intégration par parties, nous avons $\int_0^3 xe^x dx = [xe^x]_0^3 - \int_0^3 e^x dx$. Nous savons que $\exp$ est une primitive de la fonction $x \mapsto e^x$ d'où

$$\int_0^3 xe^x dx = [xe^x]_0^3 - [e^x]_0^3 = 3e^3 - e^3 + 1 = 2e^3 + 1$$

- Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$. Nous avons alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$ d'où par la formule d'intégration par parties nous déduisons que

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx = [-x \cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(x) dx = [-x \cos(x)]_0^{\pi/2} + [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$$

- Posons $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \ln(x)$ d'où $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{1}{x}$. Nous avons alors

$$\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e 1 dx = e - 1$$

Remarque: Ici formellement, il faudrait plutôt poser les fonctions u et v , dire qu'elles sont dérivables (évident dans la plupart des cas) puis donner les fonctions u' et v' .

2. $I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-x} dx$. Posons alors $u(x) = 1-x$ et $v'(x) = e^{-x}$. Aussi, par la formule d'intégration par parties, nous avons

$$I_1 = [-(1-x)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = [-(1-x)e^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{e}$$

Soit $n \geq 1$: nous avons alors $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-x} dx$. Posons $u(x) = (1-x)^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-x}$. Aussi nous avons $u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$ et $v(x) = -e^{-x}$ d'où

$$I_{n+1} = \left[\frac{-1}{(n+1)!} (1-x)^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 - \frac{n+1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-x)^n e^{-x} dx = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$$

Nous avons alors $I_2 = \frac{1}{2!} - I_1 = \frac{1}{2} - e^{-1}$ et $I_3 = \frac{1}{3!} - I_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + e^{-1} = \frac{-1}{3} + e^{-1}$.

Exo 2: Suites d'intégrales (exo 76 p. 253)

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$. Nous reconnaissons alors dans l'intégrale une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 1$ d'où $I_1 = [\ln(e^x + 1)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(2)$.
 $I_0 + I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1} dx = \int_0^1 1 dx = 1$. On en déduit alors que $I_0 = 1 - I_1 = 1 + \ln(2) - \ln(e+1)$.
2. $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx+1}x}{e^x+1} dx + \int_0^1 e^{nx} \frac{e^x+1}{e^x+1} dx = \int_0^1 e^{nx} dx = \left[\frac{e^{nx}}{n} \right]_0^1 = \frac{e^n - 1}{n}$.

3. Pour tout $x \in [0, 1]$, nous avons $nx \leq (n+1)x$, d'où par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, nous déduisons que $e^{nx} \leq e^{(n+1)x}$. Il s'ensuit donc que pour tout $x \in [0, 1]$ nous avons $\frac{e^{nx}}{e^x+1} \leq \frac{e^{(n+1)x}}{e^x+1}$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que $I_n \leq I_{n+1}$ d'où la suite (I_n) est croissante.
4. Pour tout $x \in [0, 1]$ nous avons $0 \leq x \leq 1$. Par croissance de la fonction exponentielle, nous avons $1 \leq e^x \leq e$ d'où $2 \leq e^x + 1 \leq e + 1$. Enfin, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$, nous avons $\frac{1}{e+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$. L'encadrement souhaité s'ensuit (car on multiplie l'inégalité par une quantité positive).
5. Remarquons déjà que les trois fonctions intervenants dans l'inégalité de la question précédente sont continues sur $[0, 1]$, donc intégrables sur cet intervalle. Il s'ensuit alors par croissance de l'intégrale que

$$\int_0^1 \frac{e^{nx}}{e+1} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{nx}}{e^x+1} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2} e^{nx} dx$$

Il s'ensuit donc que $\frac{e^n-1}{n(e+1)} \leq I_n \leq \frac{e^n-1}{2n}$. Par théorème de croissance comparée, on a que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n-1}{n(e+1)} = +\infty$ d'où par théorème de comparaison il s'ensuit que la suite (I_n) diverge vers $+\infty$.

Valeurs approchées de e (exo 152 p. 221)

1. $I_0(a) = \int_0^a e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}$.
2. Nous avons pour tout $k \geq 1$, $f_k(0) = 0$ et, puisque les fonctions f_k sont dérivables comme produit de fonctions dérivables, il s'ensuit que

$$f'_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} - \frac{-x^k}{n!} e^{-x} = f_{k-1}(x) - f_k(x)$$

En intégrant la précédente relation sur l'intervalle $[0, a]$, nous obtenons

$$\int_0^a f'_k(x) dx = \int_0^a f_{k-1}(x) dx - \int_0^a f_k(x) dx = I_{k-1} - I_k$$

Or, $\int_0^a f'_k(x) dx = f_k(a) - f_k(0) = -\frac{a^k}{k!} e^{-a}$. On en déduit alors la relation voulue.

3. En sommant les précédentes relations pour k variant de 1 à n , nous obtenons

$$\sum_{k=1}^n I_k(a) - I_{k-1}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{-a^k}{k!} e^{-a}$$

d'où par procédé télescopique nous avons $I_n(a) - I_0(a) = -\sum_{k=1}^n \frac{a^k}{k!} e^{-a}$. Or, $I_0(a) = 1 - e^{-a}$ d'où en faisant entrer ce terme dans la somme nous obtenons

$$I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}$$

4. (a) La fonction f_n étant positive sur $[0, 1]$, nous déduisons par positivité de l'intégrale que $u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n . La valeur de u_n représente l'aire sous la courbe de la fonction f_n entre 0 et 1.
- (b) On remarque que si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq e^{-1} \leq 1$ d'où l'encadrement souhaité.
- (c) En intégrant la précédente inégalité entre 0 et 1, nous obtenons par croissance de l'intégrale que $u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$. Ainsi, par théorème des gendarmes, nous déduisons que la suite (u_n) est de limite nulle.
- (d) Il s'ensuit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) = e$.