

Examen: EC 132 Structures algébriques Lundi 15 décembre, 10h30-12h30

Exercice 1: Matrices stochastiques

Une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **stochastique** lorsqu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) $\forall i \in [1, n]; \forall j \in [1, n], a_{ij} \in [0, 1]$;
- (ii) $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ (la somme des éléments de chaque ligne vaut 1).

Elle est dite **stochastique stricte** si, de plus, les coefficients a_{ij} sont tous strictement positifs. On notera $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathcal{S}_n^*$ celui des matrices stochastiques strictes.

1. Montrer que les ensembles $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}_n^*$ sont stables par produit.
2. Si $A \in \mathcal{S}_n$, montrer que 1 est valeur propre de A .
3. Si $A \in \mathcal{S}_n^*$, montrer que $\text{Ker}(A - I_n)$ est de dimension un.
4. Montrer que les valeurs propres d'une matrice stochastique sont toutes de module inférieur ou égal à 1, et que les valeurs propres autres que 1 d'une matrice stochastique stricte sont de module strictement inférieur à 1.
5. Soit $A \in \mathcal{S}_n$, soit λ une valeur propre de A . Montrer qu'il existe $i \in [1, n]$ tel que $|\lambda - a_{ii}| \leq 1 - a_{ii}$.

Solution exercice 1: Matrices stochastiques

1. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ stochastiques. On a $AB = (c_{ik})$, où $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$.

• Il est clair que $c_{ik} \geq 0$ pour tout couple d'indices (i, k) , l'inégalité étant stricte si A et B sont dans $\mathcal{S}_n^*$.

• On a $b_{jk} \leq 1$ pour tout (j, k) , donc $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ pour tout couple (i, k) .

• Enfin, $\sum_{k=1}^n c_{ik} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \sum_{k=1}^n b_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$

On peut aussi remarquer qu'une matrice A vérifie la propriété (ii) si et seulement si $AJ = J$, où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1. Il est alors immédiat que cette propriété (ii) est "stable par produit".

2. Si $A \in \mathcal{S}_n$, alors $AX = X$, où X est le vecteur dont toutes les coordonnées valent 1, donc 1 est valeur propre de A .

3. Soit $B = A - I_n$, soit C la matrice carrée d'ordre $n - 1$ extraite de B en ôtant la dernière ligne et la dernière colonne :

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} - 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que C est inversible. Cela repose sur le fait que $C = (c_{ij})$ est **à diagonale strictement dominante**, c'est-à-dire que, pour tout $i \in [1, n - 1]$ ent, on a $|c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}|$: en effet,

$$|c_{ii}| - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n-1 \\ j \neq i}} |c_{ij}| = |a_{ii} - 1| - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n-1 \\ i \neq j}} a_{ij} = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} = a_{in} > 0.$$

Soit donc $X = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \text{Ker} C$, supposé non nul ; on a, pour tout $i \in [1, n - 1]$, $\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}x_j = 0$. Soit $i_0 \in [1, n - 1]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n-1} |x_i|$, on a alors, pour $i = i_0$, $c_{i_0 i_0}x_{i_0} = -\sum_{j \neq i_0} c_{i_0 j}x_j$, mais c'est impossible car

$$\left| \sum_{j \neq i_0} c_{i_0 j}x_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |c_{i_0 j}| |x_j| \leq |x_{i_0}| \left(\sum_{j \neq i_0} |c_{i_0 j}| \right) < |x_{i_0}| |c_{i_0 i_0}|.$$

La matrice C est donc inversible, c'est-à-dire de rang $n - 1$, donc $B = A - I_n$ est de rang au moins égal à $n - 1$, donc exactement $n - 1$ puisqu'on sait que 1 est valeur propre de A , et donc $\dim \text{Ker}(A - I_n) = 1$.

On a ainsi prouvé le **théorème d'Hadamard**: toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$; alors la matrice $B = A - \lambda I_n = (b_{ij})$ est à diagonale strictement dominante : en effet,

$$|b_{ii}| = |a_{ii} - \lambda| \geq ||a_{ii}| - |\lambda|| = |\lambda| - a_{ii} > 1 - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} = \sum_{j \neq i} |b_{ij}|.$$

La matrice B est donc inversible, et $\lambda \notin \text{Sp}(A)$.

De même, si $A \in \mathcal{S}_n^*$ et si $|\lambda| = 1$ avec $\lambda \neq 1$, alors la matrice $B = A - \lambda I_n$ est encore à diagonale strictement dominante, puisque

$$|b_{ii}| = |a_{ii} - \lambda| > ||a_{ii}| - |\lambda|| = 1 - a_{ii} = \sum_{j \neq i} a_{ij} = \sum_{j \neq i} |b_{ij}|$$

(l'inégalité est stricte puisque l'égalité $||u| - |v|| = |u - v|$ a lieu si et seulement si les complexes u et v sont "colinéaires de même sens", c'est-à-dire l'un des deux nuls ou $\frac{v}{u} \in \mathbb{R}_+^*$ et ce n'est pas le cas ici : $\lambda \notin \mathbb{R}_+$). Donc $B = A - \lambda I_n$ est inversible, et λ n'est pas valeur propre de A .

5. Par contraposition, c'est toujours le même raisonnement : si on avait $\forall i \in [1, n] \quad |\lambda - a_{ii}| > 1 - a_{ii}$, la matrice $B = A - \lambda I_n$ serait à diagonale strictement dominante, donc inversible, et λ ne serait pas valeur propre de A .

On a ainsi obtenu une localisation des valeurs propres : si A est une matrice stochastique,

$$Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D(a_{ii}, 1 - a_{ii}) \quad (D = \text{disque fermé}) .$$

En fait, cette dernière question se généralise facilement à une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque ; avec les mêmes méthodes, on montre, que si on pose $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout $i \in [1, n]$, on a

$$Sp(A) \subset \bigcup_{i=1}^n D(a_{ii}, r_i) .$$