

Dérivation: les théorèmes fondamentaux

Dans tout le problème, on désigne par I un intervalle réel non réduit à un singleton et les fonctions considérées seront toutes, sauf mention contraire, définies sur I et à valeur dans $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction f définie sur I est dérivable en un point $a \in I$ si la fonction $\tau_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a . On désigne alors par $f'(a)$ cette limite et on dit que f est dérivable en a . Lorsque f est dérivable en tout point de I , on dit que la fonction f est dérivable sur I et on désigne par f' la fonction dérivée de f .

Partie 1: Les formules usuelles de la dérivée en un point

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- f est dérivable en $a \in I$
- il existe une fonction φ définie sur I , continue en a , telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + (x-a)\varphi(x)$$

2. On suppose que la fonction f est dérivable en a : montrer alors que f est continue en a .

3. Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I , et soit λ un réel.

Montrer que les fonctions $f+g$, λf et $f \times g$ sont dérivables en I et donner à chaque fois l'expression de la fonction dérivée associée en a .

4. On suppose que la fonction f est définie sur I et qu'elle ne s'annule pas sur I .

Montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est alors dérivable sur I et que $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.

Pour ce faire, on pourra considérer la fonction ψ définie sur I par $\psi(x) = \frac{-\varphi(x)}{f(x)f(a)}$.

5. Dérivée de l'application réciproque

Dans cette question, on considère $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue réalisant une bijection de I sur $J = f(I)$. On désigne par $f^{-1} : J \rightarrow I$ sa fonction réciproque. On admet ici que la fonction $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur J . Enfin, on suppose que $f'(a) \neq 0$.

(a) Montrer que $\forall x \neq a, \varphi(x) \neq 0$.

(b) Posons $b = f(a)$. Montrer que pour tout $y \in J \setminus \{b\}$, nous avons

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(b) = \frac{y - b}{\varphi(f^{-1}(y))}$$

où φ désigne la fonction vérifiant l'égalité de la question 1.

(c) En déduire alors que la fonction f^{-1} est dérivable en a et que $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(a)}$.

6. Théorème de composition

Soient f et g deux fonctions telle que g soit définie sur J et $f(I) \subset J$. On suppose que, pour $a \in I$, f est dérivable en a et que g est dérivable en $b = f(a)$.

Montrer alors que la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et que nous avons la formule

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times (g' \circ f)(a)$$

Partie 2: Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

1. Extremum et dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. On admet que f admet un extrémum en $c \in \overset{\circ}{I}$. En étudiant les limites à gauche et à droite du taux d'accroissement de f en c , montrer que $f'(c) = 0$.

2. Théorème de Rolle

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ vérifiant en outre $f(a) = f(b)$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. Pour ce faire, on pourra raisonner par disjonction des cas en considérant que f est constante sur $]a, b[$ où ne l'est pas.

3. Une application

Soit P un polynôme scindé: on note $a_1, a_2, \dots, a_p$ ses racines distinctes rangées dans l'ordre croissant ($a_1 < a_2 < \dots < a_p$) et α_i l'ordre de multiplicité de la racine a_i . Ainsi, $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^p (X - a_k)^{\alpha_k}$.

- (a) Montrer que a_i est une racine de P' d'ordre de multiplicité $\alpha_i - 1$.
- (b) Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ le polynôme P' possède une racine $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$.
- (c) En déduire que le polynôme P' est aussi scindé sur $\mathbb{R}$. On pourra pour ce faire comparer le degré de P' et le nombre de racines différentes obtenues précédemment.

4. Formule des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. En considérant la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

5. Monotonie et signe de la dérivée

Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Montrer les affirmations suivantes:

- (a) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
- (b) f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

6. Quel lien pouvez-vous faire entre le fait que f soit strictement croissante sur I et $f' > 0$ sur I ?

7. Formules de Taylor

Soit f une fonction définie sur $[a; b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et appartenant à $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$.

- (a) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

- (b) En déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange:

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

où $M_{n+1} = \sup_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|$.