

Solution: Dérivation: les théorèmes fondamentaux

Partie 1: Les formules usuelles de la dérivée en un point

- Supposons déjà que f est dérivable en a . Aussi, la fonction taux d'accroissement en a admet-elle une limite lorsque $x \rightarrow a$. Aussi, la fonction $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, définie sur $I \setminus a$, est continue en a (ie. elle admet un prolongement par continuité en a). Cette fonction répond à la formule cherchée.
Réciproquement, supposons l'existence d'une fonction φ continue en a telle que $\forall x \in I, f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$. Alors pour tout $x \neq a$, nous en déduisons que $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, et donc que le taux d'accroissement de f en a admet une limite en a : aussi, la fonction f est-elle dérivable en a (de dérivée $\varphi(a)$).
- Supposons donc f dérivable en a . Aussi, il existe une fonction φ vérifiant les hypothèses de la question 1.; il s'ensuit donc que, par le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions continues, la fonction f est continue en a (puisque les fonction $x \mapsto x - a$ et $x \mapsto \varphi(x)$ sont continues en a).
- Considérons les fonctions φ et ψ vérifiant respectivement les conditions de la question 1. pour les fonctions f et g . Nous avons alors

$$f(x) + g(x) = (f(a) + (x - a)\varphi(x)) + (g(a) + (x - a)\psi(x)) = (f(a) + g(a)) + (x - a)(\varphi(x) + \psi(x))$$

La fonction $x \mapsto \varphi(x) + \psi(x)$ étant continue en a (comme somme de deux fonctions continues - théorème d'opérations algébriques sur les fonctions continues), nous en déduisons que la fonction $f + g$ est dérivable en a et que sa dérivée vaut $\varphi(a) + \psi(a) = f'(a) + g'(a)$.

De même, nous avons $\lambda f(x) = \lambda f(a) + (x - a)\lambda\varphi(x)$ d'où la fonction λf est dérivable en a et de dérivée $\lambda\varphi$. Enfin, nous avons

$$f(x) \times g(x) = (f(a) + (x - a)\varphi(x)) \times (g(a) + (x - a)\psi(x)) = f(a)g(a) + (x - a)(g(a)\varphi(x) + f(a)\psi(x) + (x - a)\psi(x)\varphi(x))$$

La fonction $x \mapsto g(a)\varphi(x) + f(a)\psi(x) + (x - a)\psi(x)\varphi(x)$ étant continue en a d'après le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions continues, nous en déduisons que la fonction $f \times g$ est dérivable en a et que sa dérivée en a vaut $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

- Nous avons alors $1/f(x) - 1/f(a) = \frac{f(a)-f(x)}{f(a)f(x)} = (x - a)\frac{-\varphi(x)}{f(a)f(x)}$. Or, puisque f est continue en a et $f(a) \neq 0$ et que φ est continue en a , nous en déduisons que la fonction ψ définie par $\psi(x) = \frac{-\varphi(x)}{f(a)f(x)}$ est continue en a . Aussi, d'après la question 1. nous en déduisons que la fonction $1/f$ est dérivable en a et que sa dérivée a pour valeur $\frac{-f'(a)}{f^2(a)}$.

5. Dérivée de l'application réciproque

- Soit donc φ définie sur I et continue en a vérifiant $f(x) - f(a) = (x - a)\varphi(x)$. Puisque f réalise une bijection de I sur J , on a que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) \neq f(a)$ et donc $\varphi(x) \neq 0$.
 - Nous savons que $y - b = f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(b)) = (f^{-1}(x) - f^{-1}(b))\varphi(f^{-1}(y))$. Aussi, nous en déduisons que $f^{-1}(y) - f^{-1}(b) = \frac{y-b}{\varphi(f^{-1}(y))}$.
 - La fonction f^{-1} est continue sur l'intervalle J , donc en particulier en b . La fonction φ étant continue en $a = f^{-1}(b)$, par le théorème de composition des fonctions continues, nous en déduisons que l'application $y \mapsto \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$ est continue en b . Aussi, la fonction f^{-1} est continue en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(b))} = \frac{1}{\varphi(a)} = \frac{1}{f'(a)}$.
6. **Théorème de composition** Désignons par φ et ψ les fonctions définies sur I et continue en a telles que $f(x) = f(a) + (x - a)\varphi(x)$ et $g(x) = g(a) + (x - a)\psi(x)$. On a donc $g \circ f(x) = g(f(a)) + (f(x) - f(a))\psi(f(x)) = g(f(a)) + (x - a)\varphi(x)\psi(f(x))$. Par le théorème de composition des fonctions continues en a , nous en déduisons que la fonction $x \mapsto \varphi(x)\psi(f(x))$ est continue en a et donc la fonction $g \circ f$ est dérivable en a , et de dérivée égal à $f'(a)g'(f(a))$.

Partie 2: Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

1. **Extremum et dérivée** Admettons que cet extremum soit un maximum: comme $c \in \overset{\circ}{I}$, nous en déduisons que $f(x) - f(c) < 0$. Aussi, si $x < c$, $f(x) - f(c) < 0$ d'où $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ et si $x > c$, nous avons $f(x) - f(c) < 0$ d'où $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0$. Puisque la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ admet une limite à gauche et à droite (la fonction φ est continue en c puisque f est dérivable en c), nous en déduisons que $\lim_{c-} \varphi(x) \geq 0$ et $\lim_{c+} \varphi(x) \leq 0$ d'où $\varphi(c) = 0$. Il s'ensuit donc que $f'(c) = 0$.

On raisonne de même dans le cas où c est un minimum pour cette fonction f .

2. **Théorème de Rolle** Soit donc f une fonction définie et continue sur $[a; b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ vérifiant $f(a) = f(b)$.

Si f est constante sur $[a; b]$ alors tout élément $c \in]a; b[$ vérifie $f'(c) = 0$.

Sinon, f n'est pas constante sur $[a; b]$. Puisque f est continue sur le segment $[a; b]$, il s'ensuit qu'elle admet un extrémum $c \in [a; b]$, différent de a et de b puisque $f(a) = f(b)$. Aussi, f admet un $c \in]a; b[$ pour extremum et par la question précédente, nous en déduisons que $f'(c) = 0$.

3. Une application: Dérivée d'un polynôme scindé

- (a) Nous avons donc $P(X) = \prod_{k=1}^p (X - a_k)^{\alpha_k}$. La fonction polynomiale P étant dérivable nous obtenons $P'(X) = \sum_{k=1}^p \alpha_k (X - a_k)^{\alpha_k-1} \prod_{i \neq k} (X - a_i)^{\alpha_i}$. Nous pouvons alors factoriser par $\prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\alpha_i-1}$ et obtenons

$$P'(X) = \left(\prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\alpha_i-1} \right) \times \left(\sum_{k=1}^p \alpha_k \prod_{i \neq k} (X - a_i) \right)$$

Nous en déduisons alors que a_i est une racine de P' d'ordre de multiplicité $\alpha_i - 1$.

Remarque: Si $\alpha_i - 1 = 0$, a_i n'est pas racine de P' , mais cela est compatible avec la définition d'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

- (b) Soit donc $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Nous avons donc que $P(a_i) = P(a_{i+1}) = 0$: aussi, puisque la fonction P est dérivable sur $[a_i; a_{i+1}]$, d'après le théorème de Rolle, il s'ensuit qu'il existe $b_i \in]a_i; a_{i+1}[$ tel que $f'(b_i) = 0$.
- (c) Désignons par n le degré du polynôme P : nous avons alors $n = \sum_{k=1}^p \alpha_k$. Dénombrons le nombre de racines de P' obtenues dans les questions précédentes: nous en avons $\sum_{k=1}^p (\alpha_k - 1) = n - p$ communes avec P et $p-1$ racines b_i différentes de celles de P . Aussi, nous avons obtenu $(n-p) + (p-1) = n-1$ racines. Comme P est un polynôme de degré $n-1$ il s'ensuit que $P'(X) = \lambda' \prod_{k=1}^p (X - a_k)^{\alpha_k-1} \times \prod_{k=1}^{p-1} (X - b_k)$ donc est scindé.
4. **Formule des accroissements finis** Soit donc g la fonction définie sur $[a; b]$ par $g(x) = f(x) - f(a) - (x-a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Cette fonction est continue sur $[a; b]$ d'après le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions continues et dérivable sur $]a; b[$ par la question **I.3**. De plus $g(a) = g(b) = 0$ d'où par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$. Aussi, $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ d'où $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

5. Monotonie et signe de la dérivée

- (a) Si f est constante sur I , alors $\forall x, a \in \overset{\circ}{I}$, $f(x) - f(a) = 0$ d'où $f'(a) = 0$. Aussi, f' est la fonction nulle sur $\overset{\circ}{I}$. Réciproquement, supposons que f' soit nulle sur $\overset{\circ}{I}$. Aussi, $\forall x \neq a$ nous avons $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ d'où f est la fonction nulle sur $\overset{\circ}{I}$.
- (b) Supposons f croissante sur I et soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors $\forall x < a$ $f(x) \leq f(a)$ d'où $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. De même, pour tout $x > a$, nous avons $f(x) \geq f(a)$ d'où $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$: nous en déduisons alors, en faisant tendre $x \rightarrow a$, que $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in \overset{\circ}{I}$. Réciproquement, si $f' \geq 0$ alors d'après le théorème des accroissements finis, nous en déduisons que f est croissante sur I .

6. Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante d'après le théorème des accroissements finis. Néanmoins, la réciproque est fautive: en effet, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant $f'(0) = 0$.

7. Formules de Taylor

- (a) Raisonnons donc par récurrence sur l'entier naturel n .
Initialisation: $n = 0$ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ d'où la formule souhaitée.

Hérédité: Supposons la formule vraie au rang n et démontrons-là au rang $n + 1$. Soit donc f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[a; b]$. Alors par hypothèse de récurrence, nous avons que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{(b-x)^n}{n!}$ et f' étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, nous pouvons effectuer une intégration par partie; nous obtenons alors:

$$\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx = \left[-\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x) dx$$

Il s'ensuit alors que la formule est vraie au rang $n + 2$.

Aussi, nous avons démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n , si $f \in \mathcal{C}^{(n+1)}([a; b])$, nous avons:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$$

- (b) La fonction $f^{(n+1)}$ étant continue (de classe $\mathcal{C}^0$) sur $[a; b]$, il s'ensuit qu'elle est bornée, d'où l'existence de $M_{n+1} = \sup_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|$. Nous obtenons alors la majoration voulue.