12. Multiples, diviseurs, division euclidienne

d'après Odyssée TS Spécialité (édition Hatier)

Jean-François Culus

24 avril 2016

Cadre

Cadre :
Dans toute la leçon, les nombres considérés seront des entiers (naturels ou relatifs).

Prérequis
Notions d'entiers naturels, d'entiers relatifs.
Ecriture décimale d'un entier naturel
$\mathbb{N}$ est Archimédien
Tout ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
Raisonnements classiques (disjonction des cas, absurde, récurrence...)

$\mathbb{N}$ est archimédien :

l'axiome d'Archimède (Wikipedia)

Pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande.

$\mathbb{N}$ est archimédien

Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nb > a$.

Autre ensembles ordonnés archimédiens

$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont archimédiens (dans la définition, on suppose que $a, b > 0$).
$\mathbb{Z}^2$ muni de l'ordre lexicographique n'est pas archimédien.

Plan

Exercice introductif (Activité 3 page 9)

Montrer que les nombres suivants sont des multiples de 37 :

1. Des nombres dont l'écriture décimale est formée de trois chiffres identiques (comme 666).
2. Les nombres dont l'écriture décimale est formée de six chiffres identiques (comme 555 555).
3. Les nombres dont l'écriture décimale est formée de six chiffres par duplication d'un nombre à deux chiffres (comme 474747).
4. Montrer que $777^{333} - 333^{777}$ est divisible par 37.

• *Prise d'initiative / problème de recherche (test sur des exemples), calcul algébrique / factorisation, écriture décimale*

1. Multiples et diviseurs

Définition : Multiple / Diviseur

Soient a et b deux entiers relatifs.
On dit que l'entier relatif a divise b s'il existe un entier relatif k tel que $b = ka$.
On dit aussi que a est un diviseur de b ou encore que b est divisible par a.
On dit enfin alors que b est un multiple de a.

Exemples : 3 est un diviseur de -6 donc -6 est un multiple de 3.

1. Multiples et diviseurs : Définitions

Remarques (du livre)

Tout entier relatif a possède au moins 4 diviseurs : 1, -1, a et $-a$. En outre, un entier relatif non nul possède un nombre fini de diviseurs compris entre $-a$ et a. 0 est un cas particulier car 0 possède une infinité de diviseurs : tous les entiers relatifs non nuls.

Remarques (reformulée)

- Tout entier relatif a différent de $-1, 0$ et 1 possède au moins 4 diviseurs différents : 1, -1, $-a$ et a.
- 1 et -1 possèdent exactement 2 diviseurs différents : 1 et -1
- Si $a \neq 0$, tous les diviseurs de a sont compris entre $-a$ et a.
- Enfin tout entier relatif divise 0 donc 0 possède une infinité de diviseurs.

Propriété : Transitivité de la notion de divisiblité

Soit a, b et c trois entiers relatifs. Si a divise b et b divise c, alors a divise c.

Exemple : Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est pair.

Exemples

- Montrer que 3 divise 6^{777}.
- Montrer qu'aucun nombre pair divise 1001.

Théorème ($\star$)

Soient a, b et d trois entiers relatifs. Si d divise a et b alors d divise toute combinaison linéaire de a et b à coefficients entiers, c'est-à-dire tout entier de la forme $au + bv$ où u et v sont des entiers.

Exercice 6 page 17

- Montrer que si n est pair, alors n^2 est pair.
- Montrer que si n est impair, alors n^2 est impair.
- Montrer que $n^2 - n$ est toujours pair, pour tout entier naturel n.

2. Division euclidienne

Théorème ($\star$) : division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soit a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. Alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.
On dit que q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de a par b.

Algorithme de la différence

Entrée : a et b
Initialisation : $q = 0$
Tant que $a \geq b$ faire :
    $a - b \mapsto a$
    $q + 1 \mapsto q$
Fin Tant que
Retourner $(q; a)$.

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème ($\star$) : Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soient a et b deux entiers relatifs, avec $b \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Exemple :

- Effectuer la division euclidienne de 17 par 5
- Effectuer la division euclidienne de -17 par 5
- Effectuer la division euclidienne de 17 par -5
- Effectuer la division euclidienne de -17 par -5

Algorithme de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

L'algorithme

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Proposition ($\star$)

Soient a et b deux entiers, avec $b \neq 0$. b est un multiple de a si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Exercice (10 page 17)

On veut montrer que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6.

1. Justifier que l'un des termes est divisible par 3.
2. Montrer alors que si ce terme n'est pas divisible par 6, alors l'un des deux autres termes est divisible par 2.
3. Conclure en raisonnant par disjonction des cas.

3. Applications

1. Congruences
   - Définition
   - Exemple de critère de divisibilité (9 et 11).
2. Bases de numération (Activité 58 page 28)