

Problème 1 : étude de points fixes

Dans ce problème, on étudie la méthode du point fixe, permettant d'obtenir des valeurs approchées d'une solution d'une équation.

Après avoir abordé les questions d'existence et d'unicité d'une solution, on construit des suites convergent vers cette solution et on précise leur vitesse de convergence.

Définitions

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Soit $x \in I$. On dit que x est un point fixe pour f si $f(x) = x$.
- On dit que I est stable par f si $f(I) \subset I$.
- On dit que f est contractante sur I s'il existe un réel $\gamma \in [0, 1[$, appelé coefficient de contraction, tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge géométriquement, ou à une vitesse géométrique, vers le réel α s'il existe $k \in \mathbb{R}$, avec $0 < k < 1$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|.$$

- On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à l'ordre 2 (ou a une convergence quadratique) vers le réel α s'il existe $k \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|^2.$$

On suppose connu le théorème des valeurs intermédiaires.

Partie A : quelques études d'existence et d'unicité

Dans cette partie, pour montrer qu'une hypothèse n'est pas nécessaire ou n'est pas suffisante, on pourra se contenter de fournir un contre-exemple graphique.

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction à valeurs réelles définie sur l'intervalle $I = [a, b]$.
 - 1.1. La continuité de la fonction f est-elle une condition nécessaire à l'existence d'un point fixe ?
 - 1.2. La continuité de la fonction f est-elle une condition suffisante à l'existence d'un point fixe ?
2. Dans cette question, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$.
Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur l'intervalle $I = [0, 1]$. On pourra étudier la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [a, b]$ telle que $f([a, b]) = [a, b]$.
 - 3.1. Démontrer que f possède un point fixe sur $[a, b]$.
 - 3.2. Dans cette question, on suppose de plus que f est strictement décroissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?
 - 3.3. Dans cette question, on suppose maintenant que f est strictement croissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?

Partie B : étude d'une suite convergeant vers un point fixe

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \alpha$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\alpha}{t} \right)$.
 - 1.1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$. Justifier l'équivalence : x_0 est un point fixe de g si et seulement si x_0 est solution de l'équation $f(x) = 0$.
 - 1.2. Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$.
Après avoir déterminé l'équation de la tangente T_t à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse t , démontrer que le réel $g(t)$ est l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.
 - 1.3. En vue de la préparation d'une activité à présenter devant une classe de terminale scientifique, interpréter graphiquement le résultat précédent pour construire une suite convergente vers la solution positive de l'équation $x^2 - \alpha = 0$.
2. On considère maintenant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{\alpha}{u_n} \right).$$

- 2.1. Démontrer que si $u_0 = \sqrt{\alpha}$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire et que si $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > \sqrt{\alpha}$. Dans la suite, on suppose $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$.
- 2.2. En déduire que pour tout entier naturel n , u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe C_f au point de coordonnées $(u_n, f(u_n))$ avec l'axe des abscisses.
- 2.3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir du deuxième terme.
- 2.4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers le réel $\sqrt{\alpha}$.
- 2.5. Dans cette question, on s'intéresse à la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers le réel $\sqrt{\alpha}$ dans le cas particulier où $\alpha = 2$.
Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |u_n - \sqrt{2}|^2.$$

En déduire la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie C : un théorème du point fixe

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, on désigne par I l'intervalle $[a, b]$.

On considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les deux hypothèses suivantes :

H1 : l'intervalle I est stable par f ,

H2 : f est contractante, de coefficient de contraction γ .

1. Démontrer que la fonction f étant contractante sur I , elle est nécessairement continue sur I .
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
 - 2.1. Quelle hypothèse permet d'assurer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie ?
 - 2.2. Démontrer que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \gamma^j |u_1 - u_0|$$

et en déduire que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad |u_{n+p} - u_n| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} |u_1 - u_0|.$$

- 2.3. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans I .
3. Démontrer que la fonction f admet un point fixe unique dans I .
4. Énoncer le théorème du point fixe ainsi démontré.
5. Que peut-on dire de la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?