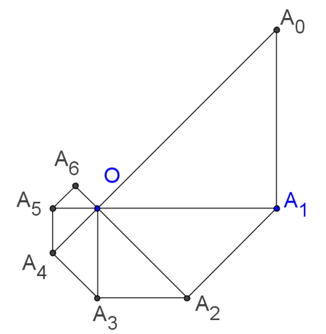
Exercices sur les suites numériques
Indice, 1ere S, Term S

Calcul de la longueur d'une ligne brisée

Soit OA_0A_1 un triangle rectangle isocèle en A_1. Extérieurement au triangle OA_0A_1, on construit sur le côté $[OA_1]$ un triangle OA_1A_2 rectangle et isocèle en A_2.



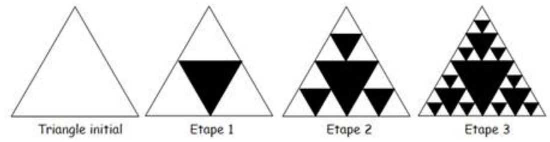
1. On pose $OA_0 = 1$. Démontrer que $0A_1 = A_0A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   On réitère le procédé et on trace une suite de triangles rectangles isocèles.
   Si $0A_{n-1}A_n$ est un triangle rectangle isocèle en A_n, on trace extérieurement à celui-ci le triangle OA_nA_{n+1} rectangle isocèle en A_{n+1}.
2. Déterminer une relation entre OA_{n+1} et OA_n.
3. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = OA_n$.
   Déterminer la nature de la suite (u_n) et exprimer son terme général en fonction de n.
4. On note L_n la longueur de la ligne brisée : $OA_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$, c'est-à-dire $L_n = OA_0 + A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$. Déterminer l'expression de L_n en fonction de n.
5. Conjecturer la limite de la suite (L_n).

Solution

1. Le triangle OA_0A_1 étant rectangle en A_1, nous avons d'après le théorème de Pythagore que $A_0A_1^2 + OA_1^2 = OA_0^2$. Comme ce triangle est isocèle en A_1, on en déduit aussi que $A_0A_1 = OA_0$ d'où $2OA_1^2 = OA_0^2 = 1$. Il s'ensuit alors que $OA_1^2 = \frac{1}{2}$ d'où $OA_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme OA_1 est une longueur (donc toujours positive), on a alors $OA_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Le triangle OA_nA_{n+1} étant rectangle en A_{n+1}, d'après le théorème de Pythagore, nous en déduisons que $OA_{n+1}^2 + A_nA_{n+1}^2 = OA_n^2$. Comme ce triangle est aussi isocèle en A_{n+1}, il s'ensuit que $OA_n = A_nA_{n+1}$ et donc nous ontenons la relation $2OA_{n+1}^2 = OA_n^2$, soit $OA_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}OA_n$.
3. Posons donc $u_n = OA_n$. D'après la question précédente, nous avons $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n$. Aussi, (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On a alors la formule, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.
4. Nous avons $L_n = OA_0 + A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons $OA_k = A_{k-1}A_k$ d'où $L_n = OA_0 + OA_1 + OA_2 + \dots + OA_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. On reconnaît alors la somme des premiers termes d'une suite géométrique, d'où $L_n = \frac{1-(\sqrt{2}/2)^{n+1}}{1-\sqrt{2}/2}$.
5. Comme $0 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, d'après le théorème des suites géométriques, nous savons que la suite de terme général $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ converge vers 0. On déduit alors du théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes que la suite (L_n) converge vers $\frac{1}{1-\sqrt{2}/2} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2} = 2 + \sqrt{2}$.

Un exercice avec prise d'initiative

On divise un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux obtenus en traçant les segments joignant les milieux des côtés et on noircit le triangle central. Chaque triangle non noirci est alors divié en quatre triangles équilatéraux selon le même procédé et on noircit le triangle central comme précédemment.



Déterminer le nombre total de triangles noircis après n étapes.

Solution

Désignons par N_k le nombre de triangles noircis à l'étape k et B_k le nombre de triangles blancs à l'étape k. Nous avons donc $B_0 = 1$ et $N_0 = 0$.
A chaque étape, chaque triangle blanc donne naissance à 4 triangles: trois blancs et un noirci. Aussi, nous en déduisons les relations de récurrences suivantes:

$$B_{n+1} = 3B_n; \qquad N_{n+1} = N_n + B_n$$

Nous déduisons aisément que (B_n) est une suite géométrique de premier terme $B_0 = 1$ et de raison 3, donc $B_n = 3^n$.
Concernant (N_n), nous savons que $\forall k$, $N_{k+1} = N_k + 3^k$. Ecrivons ces relations pour k variant de 1 à n: nous obtenons:
$N_{n+1} = N_n + 3^n$
$N_n = N_{n-1} + 3^{n-1}$
$N_{n-2} = N_{n-2} + 3^{n-2}$
$\vdots$
$N_1 = N_0 + 3^0$
En sommant ces relations, nous obtenons (par télescopage)

$$N_{n+1} = N_0 + 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^n = N_0 + \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n - 1}{2}$$

Expression du nombre d'or par les radicaux

On sait calculer les nombres $\sqrt{1+\sqrt{1}}$ et $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$ écrits respectivement avec deux et trois racines carrées. On va s'intéresser ici au nombre $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ écrit avec une infinité de racines carrées. Pour cela, on étudie la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ pour tout entier naturel n.

1. Déterminer, par la calcul le nombre obtenu lorsqu'il n'y a que deux racines, puis trois racines.
2. Expliquer pourquoi l'équation $x = \sqrt{1+x}$ admet une solution positive. On note Φ cette solution, appelée nombre d'or.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\Phi \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} - \Phi \leqslant \frac{1}{3}(u_n - \Phi)$. *(On pourra utiliser l'égalité* $\Phi = \sqrt{1+\Phi})$ *puis la méthode de l'expression conjuguée)*
5. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n - \Phi \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
6. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? On montre ainsi que $\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$.
7. A partir de quel rang n est-ce que (u_n) réalise une approximation de ϕ à 10^{-6} près ?

Solution

1. Nous avons $\sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{2}$ et $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$.

2. L'équation $x = \sqrt{1+x}$ est équivalente à l'équation $x^2 = 1 + x$ avec $x \geqslant 0$. Calculons le discriminant de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$: nous avons $\Delta = 1 + 4 = 5$ d'où les solutions de l'équation sont $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Comme Φ est la solution positive de cette équation, nous en déduisons que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   On peut aussi argumenter graphiquement en remarquant que les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{1+x}$ s'intersectent une fois, d'où un x tel que $x = \sqrt{1+x}$ ou encore en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur la fonction $f : x \mapsto x^2 - x - 1$. Nous avons $f(0) = -1$ et $f(2) = 4 - 2 - 1 = 1$. Comme la fonction f est continue, on en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires que f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]0; 2[$, d'où l'équation $x = \sqrt{1+x}$ admet une solution sur cet intervalle..

3. Désignons donc par Φ la solution positive de l'équation $x = \sqrt{x+1}$. Nous avons donc $\Phi = \sqrt{1+\Phi}$. Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel n pour démontrer la formule $\Phi \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$.
   • Initialisation: Au rang $n = 0$, nous avons $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{3} \in [1; 2]$. Aussi, nous avons $u_1 \leqslant u_0 \leqslant 2$: reste à montrer la minoration $\Phi \leqslant u_0$. Nous avons $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $u_1 = \sqrt{3}$
   Partons que $\sqrt{5} \leqslant 3$. En multipliant par 2, on obtient que $2\sqrt{5} \leqslant 6$ d'où $1 + 2\sqrt{5} + 5 \leqslant 12$. On reconnaît alors une identité remarquable dans le membre de gauche, d'où $(1 + \sqrt{5})^2 \leqslant 12$. En prenant la racine carré de cette inégalité, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ nous déduisons que $1 + \sqrt{5} \leqslant 2\sqrt{3}$ d'où $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \sqrt{3} = u_1$.
   Nous en déduisons donc que la suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle est convergente. De plus, si ℓ désigne sa limite, alors nous avons $\Phi \leqslant \ell$ par prolongement des inégalités.

4. Soit $n \geqslant 1$. Nous avons alors: $u_{n+1} - \Phi = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\Phi} = \frac{(1+u_n)-(1+\Phi)}{\sqrt{1+u_n}+\sqrt{1+\Phi}}$. Or, nous avons les minorations: $\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\Phi} \leqslant 2\sqrt{1+\Phi} \geqslant 2\Phi \geqslant 1 + \sqrt{5} \geqslant 3$. Il s'ensuit donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ que
$$u_{n+1} - \Phi \leqslant \frac{u_n - \Phi}{3}$$

5. En utilisant un raisonnement par récurrence, on montre que $0 \leqslant u_n - \Phi \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

6. Comme $0 \leqslant \frac{1}{3} < 1$, nous déduisons du critère de convergence des suites géométriques que la suite de terme général $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge vers 0. Aussi, d'après le théorème des gendarmes (aussi appelé théorème des suites convergentes ayant même limite), nous en déduisons que la suite $(u_n - \Phi)$ converge vers 0. Il s'ensuit alors que la suite (u_n) converge vers Φ.

   On a donc, par passage à la limite: $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}}$.

7. D'après la question **5.**, u_n réalise une approximation de ϕ à $\frac{1}{3^n}$. Auss, u_n est une approximation de ϕ à 10^{-6} près dés que n vérifie $\frac{1}{3^n} \leqslant 10^{-6}$, soit $10^6 \leqslant 3^n$. Cela implique que $n \geqslant 6\ln(10)/\ln(3)$.

Approximation de $\sqrt{a}$ avec $a > 0$ par la méthode de Héron

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ et $u_0 > \sqrt{a}$.

1. Etudier les variations sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

2. Etudier le signe de $f(x) - x$ pour $x > 0$.

3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n$.
   En déduire la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite.

4. En faisant des choix pour u_0, déterminer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ à 10^{-10} près.

Solution:

1. La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ est dérivable sur cet intervalle comme somme de deux fonctions dérivables. Nous avons $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$. On en déduit alors que la fonction f' est négative sur $]0; \sqrt{a}[$ et positive sur $]\sqrt{a}; +\infty[$, d'où la fonction f est strictement décroissante sur $]0; \sqrt{a}[$ et strictement croissante sur $]\sqrt{a}; +\infty[$.

2. Comme $x > 0$, nous déduisons que $f(x) - x < 0$ pour $x \geqslant \sqrt{a}$ et $f(x) - x > 0$ pour $x \leqslant \sqrt{a}$.

3. Raisonnons donc par récurrence sur l'entier naturel n.
   • Initialisation: Au rang $n = 0$, nous avons $u_0 > \sqrt{a}$. Aussi, d'après la question précédente, nous avons que $f(u_0) - u_0 < 0$ soit $f(u_0) = u_1 < u_0$. Enfin, comme f est croissante sur $]\sqrt{a}; +\infty[$, on en déduit de $\sqrt{a} < u_0$ que $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a} < f(u_0) = u_1$.
   • Hérédité: Supposons l'encadrement vrai au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n$. Par stricte croissance de la fonction f sur $]\sqrt{a}; +\infty[$, nous en déduisons que $f(\sqrt{a}) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$ soit $\sqrt{a} < u_{n+2} < u_{n+1}$. On établit alors bien l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$.
   • Conclusion: On démontre ainsi par récurrence que, pour tot entier naturel n, $\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n$.

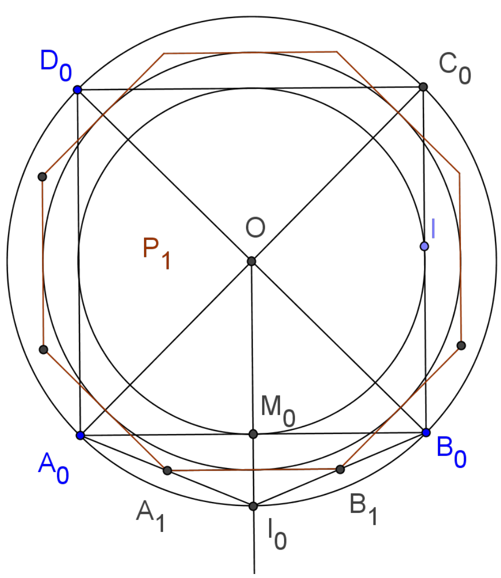
   Aussi, la suite (u_n) est-elle décroissante et minorée par $\sqrt{a}$: elle est donc convergente par le théorème des suites monotones. Désignons par ℓ sa limite. Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ d'où par continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier en ℓ, nous obtenons par passage à la limite que $f(\ell) = \ell$. Aussi, ℓ est-il un point fixe de f sur $[\sqrt{a}; +\infty[$. Or, par stricte croissance de f sur $\sqrt{a}$, l'unique réel vérifiant cette équation est $\sqrt{a}$ d'où $\ell = \sqrt{a}$. Il s'ensuit donc que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

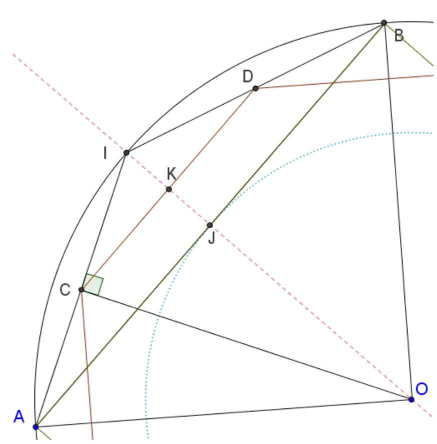
4. ...

Problème 1: Méthode des isopérimètres

Ce problème propose l'étude d'une méthode d'approximation de π au moyen de la construction de polygônes réguliers de périmètre constant (méthode des iso-périmètres). La partie A propose la mise en oeuvre de la construction des premiers polygônes: elle ne nécessite pas de justification. La partie B s'intéresse au passage du polygône à 2^n côtés au polygône à 2^{n+1} côtés: il s'agit ici de justifier la méthode. La partie C s'intéresse à la mise en oeuvre algorithmique de cette méthode d'approximation de π au moyen d'une observation géométrique. La partie D est consacrée à la démonstration de la convergence des suites exhibées vers π.

Partie A: Tracé des polygones et des cercles





1. Contruire un carré $A_0B_0C_0D_0$ de centre O et de périmère 2 et son cercle circonscrit. On appelle P_0 ce carré.

2. (a) Placer le milieur M_0 du segment $[A_0B_0]$ puis tracer la demi-droite $[OM_0)$. Elle coupe le cercle circonscrit au carré au point I_0.
   (b) Construire les milieux des segments $[A_0I_0]$ et $[I_0B_0]$ qu'on nomme respectivement A_1 et B_1.
   (c) Construire le polygone régulier à huit côtés (octogone) P_1 à partir des points A_1 et B_1.

3. Réitérer la construction pour obtenir le polygone P_2 à 16 côtés.

4. Vérifier que les polygones obtenus ont bien le même périmètre.

5. Construire les cercles inscrits dans les polygones P_0, P_1 et P_2.

6. On peut ainsi construire une suite de polygones P_n de 2^{n+2} côtés (avec n entier naturel) et de périmètre égal à 2. On note h_n et r_n les rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit du polygone P_n. Quelles conjectures peut-on faire sur les suites (h_n) et (r_n) ?

Partie B: Détermination de relations de récurrence

1. Montrer que $h_0 = \frac{1}{4}$ et $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

2. Soit le polygone P_n de centre O et soit $[AB]$ l'un de ses côtés. On appelle I le milieu de l'arc
   On a $OJ = h_n$, $OI = r_n$. On note C le milieu de $[AI]$, D le milieu de $[IB]$ et K le milieu de $[CD]$.
   (a) Montrer que $CD = \frac{AB}{2}$. Le segment $[CD]$ est un côté du polygone P_{n+1}.
   (b) Montrer que K est le milieu de $[IJ]$.
   (c) En déduire que $r_{n+1} = OC$ et $h_{n+1} = OK$.

3. Montrer que $2OK = OI + OJ$ En déduire une relation entre h_{n+1}, h_n et r_n.

4. Montrer que $\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OI}$. En déduire une relation entre r_{n+1}, h_n et r_n.

Partie C: Encadrement de π

1. En utilisant l'encadrement du périmètre du polygone P_n par les périmètres des cercles inscrit et circonscrit, montrer que $\frac{1}{r_n} < \pi < \frac{1}{h_n}$.

2. Compléter l'algorithme suivant:

```
Saisir p
n prend la valeur 0
h prend la valeur ...
r prend la valeur ...

    Tant que 1/h − 1/r > p
      n prend la valeur ...
      h prend la valeur ...
      r prend la valeur ...
    Fin Tant que

Afficher 1/r, 1/h et n.
```

Partie D: Etude de deux suites définies par récurrence

Voir aussi Capes 91

Soient $0 < a < b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$$
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $0 < v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{v_n-u_n}{2}$ et en déduire la convergence de la suite $(v_n - u_n)$. On précisera sa limite.
3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite, notée ℓ.
4. Justifier l'existence et l'unicité de $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = b\cos(\theta)$.
5. Exprimer u_0 et v_0 en fonction de a, b et θ et vérifier que $u_1 = b\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $v_1 = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
6. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, nous avons
$$u_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right); \quad v_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$
7. Démontrer que $\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.
8. En déduire que $v_n = \frac{b\sin(\theta)}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.
9. En étudiant le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0, démontrer que $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.
10. En déduire que $\ell = \frac{b\sin(\theta)}{\theta}$.
11. **Application: Problème sur les méthodes isopérimétriques, TS**
On revient au problème sur les méthodes isopérimétriques.
Est-ce que la conjecture obtenue alors au moyen de considérations géométriques $\frac{1}{r_n} \leqslant \pi \leqslant \frac{1}{h_n}$ est vérifiée ?

Solution

1. Il faut donc montrer que $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0$ (puisque le nombre de côtés du polygone double à chaque fois).
Considérons le triangle $A_0B_0I_0$. Nous savons que A_1 est le milieu de $[A_0I_0]$ et que B_1 est le milieu de $[B_0I_0]$. Aussi, d'après le théorème de la droite des milieux, nous savons que $(A_1B_1)//(A_0B_0)$ et $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0$. Aussi, ces deux polygônes ont bien même périmètre. Par itération des constructions, on en déduit que tous les polygones construits ont même périmètre.
2.
3. On peut conjecturer que la suite (h_n) est une suite croissante et que (r_n) est, elle décroissante. De l'inégalition $h_n < r_n$ ont déduit que ses deux suites sont convergentes et on peut conjecturer que leur limite est commune.

Partie B: Détermination de relations de récurrence

1. Le premier polygone étant un carré de périmètre 2, il s'ensuit que ses côtés sont de longueur 1/4, et que $OA_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (par Pythagore).
2. (a) En utilisant le théorème de la droite des milieux dans le triangle IAB, comme C est le milieu de $[IA]$ et D celui de $[IB]$, on en déduit que $CD = \frac{1}{2}AB$.

(b) Nous allons montrer que le quadrilatère $IDJC$ est un losange. Pour ce faire, considérons le triangle AIB. Nous savons que C est le milieu de $[IA]$ et J celui de $[AB]$, donc nous déduisons du théorème de la droite des milieux que $(CJ)//(IB)$ et que $CJ = \frac{1}{2}IB = ID$.
De même, toujours dans ce triangle IAB, nous avons D milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AB]$, d'où nous déduisons que $(DJ)//(IA)$ et $DJ = \frac{1}{2}IA = IC$. Aussi, nous savons que le quadrilatère $IDJC$ a ses quatre côtés deux à deux paralléles donc c'est un parallélogramme. Comme de plus le triangle IAB est isocèle en I, nous en déduisons que $IA = IB$ et donc, grace aux égalités de longueurs précédentes, on en déduit que les côtés du parallélogramme $IDJC$ sont égaux, d'où c'est un losange. Aussi, ses diagonales sont-elles perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Aussi, le milieu de $[IJ]$ et de $[CD]$ est-il le point K. On a donc bien K milieu de $[IJ]$.

(c) D'après la construction précédente, nous savons que C est un sommet du polygone P_{n+1} et donc $r_{n+1} = OC$. Comme $[CD]$ est un côté de P_{n+1}, il s'ensuit que le cercle inscrit à P_{n+1} passe par K le milieu de $[CD]$. On a ainsi $r_{n+1} = OK$.

3. Les points O, I, J et K étant alignés, puisque K est le milieu de IJ nous avons $IJ = IK + KJ$. Aussi, $OI + OJ = 2OJ + JK + KI = 2OJ + 2JK = 2OK$.

   Nous avons donc $h_{n+1} = \frac{1}{2}(r_n + h_n)$.

4. Remarquons que les droites (OC) et (AI) sont perpendiculaires (puisque $[OC]$ est un rayon du cercle inscrit au polygône dont un côté est $[AI]$). Il s'ensuit alors par définition du carré scalaire que:

$$\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC}\right) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OI} + \underbrace{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{IC}}_{=0}$$

   On a donc $\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OI}$. Comme K est le projeté orthogonal de C sur (OI), il s'ensuit que $\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OI}$. *On peut aussi utiliser la relation de Chalses, avec* $\overrightarrow{OC}^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OI} = \left(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KC}\right) \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{OI}$. *Or, comme* $[CD]$ *est une corde du cercle de centre* O *passant par* C*, on en déduit que* O *appartient à sa médiatrice; aussi,* (OK) *est perpendiculaire à* (CD) *et donc les vecteurs* $\overrightarrow{KC}$ *et* $\overrightarrow{OI}$ *sont orthogonaux.*

   En calculant chacun de ces produits scalaires séparément, nous obtenons l'égalité $r_{n+1}^2 = r_n \times h_n$.

Partie C: Encadrement de π

1. En comparant donc les périmètres des cercles inscrits, circonscrit et du polygone lui-même, nous obtenons l'encadrement:

$$2\pi h_n < 2 < 2\pi r_n$$

   Nous obtenons alors $\frac{1}{r_n} < \pi < \frac{1}{h_n}$.

2. Compléter l'algorithme suivant:

```
Saisir p
n prend la valeur 0
h prend la valeur 1/4
r prend la valeur √2/4

    Tant que 1/h − 1/r > p
      n prend la valeur n + 1
      h prend la valeur 1/2(h + r)
      r prend la valeur r(2h − r).
    Fin Tant que

Afficher 1/r, 1/h et n.
```

Partie D: Etude de deux suites définies par récurrence

1. Raisonnons par récurrence sur l'entier naturel n pour démontrer la propriété $\mathcal{P}(n)$: $0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.
• *Initialisation:* Au rang $n = 0$, nous avons déjà $0 < u_0 = a < v_0 = b$. De $u_1 = \frac{a+b}{2} > \frac{a+a}{2} = a_0$ nous déduisons que $b > u_1 > u_0$. De même, de $v_1 = \sqrt{u_1 \times v_0}$ nous déduisons que $v_1 < v_0 = b$.
Reste alors à comparer u_1 et v_1.
$$v_1 - u_1 = \sqrt{u_1 v_0} - u_1 = \sqrt{u_1}\left(\sqrt{v_0} - \sqrt{u_1}\right) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0}+\sqrt{u_1}}(v_0 - u_1) = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt{v_0}+\sqrt{u_1}}\left(\frac{v_0 - u_0}{2}\right) > 0$$
Il s'ensuit alors que $v_1 > u_1$ et nous avons donc $0 < u_0 < u_1 < v_1 < v_0 < b$. Aussi, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est-elle vraie.
Hérédité Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \geqslant 0$ et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Nous avons déjà $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{2} > u_{n+1} > 0$ et $v_{n+2} = \sqrt{\frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{2} v_{n+1}} < \sqrt{v_{n+1}^2} = v_{n+1}$.
Il reste donc à comparer v_{n+2} et u_{n+2}.
$$\begin{aligned} v_{n+2} - u_{n+2} &= \sqrt{u_{n+2}}\left(\sqrt{v_{n+1}} - u_{n+2}\right) = \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}+\sqrt{u_{n+2}}}}\left(v_{n+1} - u_{n+2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{u_{n+2}}}{\sqrt{v_{n+1}+\sqrt{u_{n+2}}}}\left(v_{n+1} - \frac{u_{n+1}+v_{n+1}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{v_{n+1}-u_{n+1}}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$
Nous en déduisons donc que $v_{n+2} > u_{n+2}$, d'où $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < v_{n+2} < v_{n+1}$. Aussi, la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est-elle vraie.
• *Conclusion:* On en déduit finalement que $\forall n \geqslant 0$, $0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$.

2. Nous avons d'après les inégalités de la question précédente, $0 < v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{\sqrt{v_n}+\sqrt{u_{n+1}}}\left(\frac{v_n - u_n}{2}\right) < \frac{v_n - u_n}{2}$.
Nous en déduisons alors, par itération, que $0 < v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. En déduit alors du théorème des gendarmes que $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

3. Des questions précédentes, nous déduisons que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante et que la suite $(v_n - u_n)$ est de limite nulle. Aussi, les suites (u_n) et (v_n) sont-elles adjacentes: elles sont donc convergentes et ont même limite. Soit alors ℓ leur limite commune.

4. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ étant strictement décroissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, elle réalise une bijection de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0;1[$. Aussi, puisque $0 < a < b$, nous avons $0 < \frac{a}{b} < 1$, d'où il existe un unique $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\frac{a}{b} = \cos\theta$.

5. Nous avons alors $v_0 = b$ et $u_0 = a = b\cos(\theta)$.
De même, $u_1 = \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{b(1+\cos\theta)}{2} = b\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

6. Raisonnons par récurrence sur $n \geqslant 1$ pour démontrer ces formules.
Initialisation: La question précédente montre que la formule est vraie au rang $n = 1$.
Hérédité Supposons donc ces formules vraies au rang n et démontrons-les au rang $n+1$.
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\frac{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2}$$
Or, comme $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$ nous obtenons que $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\cos(a)+1}{2}$. En utilisant cette formule, nous obtenons que $u_{n+1} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ ce qui correspond bien à la formule recherchée.
Par ailleurs, $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$. Nous en déduisons alors que les deux formules sont vraies au rang $n+1$.
Conclusion: Il s'ensuit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, nous avons les expressions
$$u_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right); \quad v_n = b\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\dots\cos\left(\frac{\theta}{2^{n-1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

7. De la formule $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$, par itération, nous déduisons la formule $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.
Formellement, il faut faire une récurrence ...

8. En remplaçant dans la formule donnant l'expression de v_n, nous obtenons $v_n = \frac{b\sin(\theta)}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$.

9. Comme $\sin(0) = 0$, dans $\frac{\sin(x)}{x}$ nous reconnaissons le taux d'accroissement de la fonction sin en 0. Comme $\sin' = \cos$, nous avons $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$.
10. Quand $n \to +\infty$, $\frac{\theta}{2^n} \to 0$. Aussi, de la question précédente, nous déduisons que $\frac{\sin \theta/2^n}{\theta/2^n} \to 1$. Il s'ensuit alors que $v_n \to \frac{b\sin(\theta)}{\theta}$ quand $n \to +\infty$. Nous avons donc bien $\ell = \frac{b\sin(\theta)}{\theta}$.
11. **Application: Problème sur les méthodes isopérimétriques, TS** Nous avions $a = h_0 = 1/4$ et $b = r_0 = \sqrt{2}/4$ d'où $\frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\theta = \frac{\pi}{4}$. Il s'ensuit alors que la limite commune des suites (h_n) et (r_n) est $\frac{b\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{1}{\pi}$. Aussi, la conjecture réalisée dans l'exercice de TS. est bien démontrée.

Petit problème 2: Des suites classiques

On considère les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ définies par

$$\forall n \geqslant 1; \qquad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n; \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Partie 1: Préliminaires

1. Montrer que pour tout réel x, on a $e^x \geqslant x+1$.
2. En déduire que pour tout réel $t < 1$, on a $e^t \leqslant \frac{1}{1-t}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, nous avons $a_n \leqslant e \leqslant b_n$.

Partie 2 : Suites adjacentes

Soient f et g les fonctions définies sur $[1;+\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \qquad et \qquad g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

1. Etudier le sens de variation des fonctions f et g (on apportera grand soin à la rédaction des calculs nécessaires).
2. En déduire le sens de variation des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $b_n - a_n \leqslant \frac{e}{n}$.
4. Conclure au comportement des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ et précisez leur(s) éventuelle(s) limite(s).

Partie 3: Applications

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
   Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{b_n}$ et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On précisera son éventuelle limite.
2. Etudier le comportement de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ et précisez son éventuelle limite.

Solution

Partie 1: Préliminaires

1. La fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes. L'équation de la tangente en 0 est $y = x + 1$ d'où nous déduisons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$.

> **Méthodes:** On peut ici soit introduire la fonction $f(x) = e^x - x - 1$ et en étudier le sens de variation (ne pas oublier de justifier par le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables qu'elle l'est), soit faire appel aux propriétés des fonctions convexes.
> **Rappels sur les fonctions convexes** Rappelons que $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur l'intervalle I si $\forall(x, y) \in I^2$, $\forall\lambda \in [0; 1]$, $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Géométriquement, lorsque λ parcours $[0; 1]$, le point de coordonnées $(\lambda x + (1 - \lambda)y; f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ parcours la portion de la courbe représentative de f entre x et y, alors que le point de coordonnées $(\lambda x + (1 - \lambda)y; \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y))$ décrit le segment $[AB]$ où $A(x; f(x))$ et $B(y; f(y))$. Ainsi, l'inégalité proposée indique donc que la courbe est sous la corde.
> Rappelons que si f est convexe sur l'ouvert I, alors f est continue en tout point $x \in I$, f admet une dérivée à gauche et à droite en tout point $x \in I$, et les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes. De cette dernière propriété, on déduit que l'ensemble des points pour lesquels f n'est pas dérivable est au plus dénombrable.
> Un critère de convexité lorsque f est dérivable: Si la fonction f est dérivable sur I, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I. Aussi, si f est deux fois dérivable et $f'' > 0$, alors f est convexe.

2. Soit $t < 1$. D'après l'inégalité précédente appliquée en $x = -t$, nous obtenons que $e^{-t} \geqslant 1 - t$, soit $\frac{1}{e^t} \geqslant 1 - t$. Comme $t < 1$, alors $1 - t > 0$. Comme la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ nous en déduisons que $e^t \geqslant 1 - t$ d'où l'inégalité souhaitée.

3. De l'inégalité **1** prise pour $x = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ nous déduisons que $e^{1/n} \geqslant \frac{1}{n} + 1$, d'où par croissance de la fonction puissance $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ nous déduisons que $e \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$: nous avons donc pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant e$.
   En appliquant l'inégalité **2** avec $x = \frac{1}{n+1}$ nous en déduisons que $e^{1/(n+1)} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n}$. Par croissance de la fonction puissance $x \mapsto x^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, nous déduisons que $e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, soit pour tout entier naturel $n \neq 0$, $e \leqslant b_n$.

4. Nous avons $\forall n \geqslant 1$, $b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \frac{e}{n}$.

Partie 2 : Suites adjacentes

1. Soit donc la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = (x + 1)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$. Cette fonction est dérivable sur $[1; +\infty[$ comme produit et composée de fonction dérivables. Nous avons: $d\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}$, $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{-1}{x(x+1)}$ d'où nous déduisons que $f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x}$. La fonction f' étant dérivable, étudions sa dérivée seconde: Etudions la dérivée seconde: $-\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}^2(x + 1) > 0$. Aussi nous en déduisons que f' est strictement croissante: or, par les théorèmes de composition des limites et d'opérations algébriques sur les limites, nous avons que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, d'où $f' < 0$ sur $[1; +\infty[$. Aussi, la fonction f est-elle strictement décroissante.

> **Remarques:** • Au lieu d'étudier la dérivée seconde, il y avait plus astucieux: utiliser l'inégalité **I.1**. En effet puisque pour tout réel x nous avons $e^x \geqslant x + 1$, il s'ensuit par croissance de la fonction logarithme que pour tout $x > -1$, $x \geqslant \ln(x+1)$. En remplaçant x par $\frac{1}{x}$ on en déduit que $\frac{1}{x} \geqslant \ln(1+\frac{1}{x})$ soit $f'(x) < 0$ pour tout $x > -1$.
> • Néanmoins sans voir cette astuce, le calcul était possible: il faut faire preuve de persévérance et d'ordre dans ses calculs! Ici, le calcul de la dérivée de f peut poser problème à qui ne s'organise pas bien... Ce calcul est néanmoins faisable dés la TS.
> • On fera bien attention à la stricte monotonie de f': ici, elle est nécessaire pour conclure à la stricte décroissance de f.

   De même, nous avons g dérivable. Il s'ensuit que $g'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$. En dérivant une seconde fois, nous obtenons $g''(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2}$. Aussi, la fonction g'' est strictement négative sur $[1; +\infty[$ donc g' est strictement décroissante sur cet intervalle. Comme $\lim_{n\to+\infty} g'(x) = 0$ nous en déduisons que g' est strictement positive sur $[1; +\infty[$, d'où g est strictement croissante sur cet intervalle.

2. Nous avons $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ d'où comme de manière évidente $\forall n \geqslant 1$, $a_n > 0$ nous avons $\ln(a_n) = n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Il s'ensuit alors que $\ln(a_n) = g(n)$. Par stricte croissance de g, nous avons donc $\ln(a_{n+1}) > \ln(a_n)$ d'où par stricte croissante de la fonction exponentielle il s'ensuit que $a_{n+1} > a_n$. Aussi, la suite $(a_n)_{n\geqslant1}$ est strictement

croissante.
En remarquant que $\ln(b_n) = f(n)$, nous déduisons par des arguments similaires que $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons $b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \times \left(1+\frac{1}{n}-1\right) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.
Par **I.1** nous savons que $e^{1/n} \geqslant \frac{1}{1-1/n}$ d'où par croissance de la fonction puissance $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ il s'ensuit que $e \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. On a donc $b_n - a_n \leqslant \frac{e}{n}$.
4. La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et la limite de leurs différences est nulle: il s'ensuit donc que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles sont donc convergentes et ont même limite.
De **I.3** nous déduisons que leur limite commune est e.

Partie 3: Applications

1. Nous avons donc $1+\frac{1}{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+n}}$ d'où en élevant à la puissance n nous obtenons:

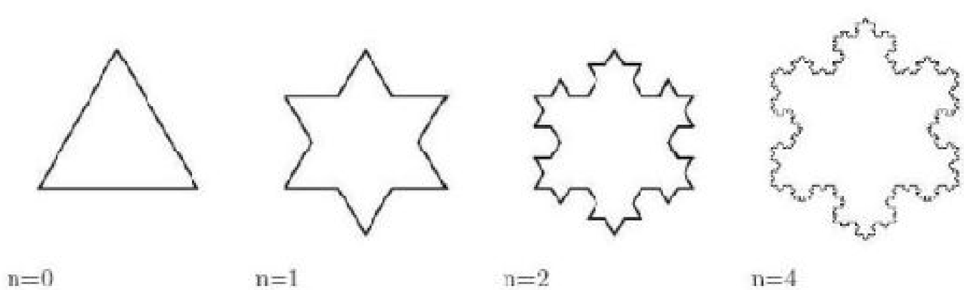
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+n}}\right)^{n} = (1-\frac{1}{1+n}) \times \frac{1}{\frac{1}{(1-\frac{1}{1+n})}}^{n+1}$$

Nous en déduisons que $u_{n+1} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+n}}\right) \times \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$. Aussi, par le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, nous obtenons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{e}$.
2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente: en effet, nous remarquons que $v_{2n} = a_{2n}$ alors que $v_{2n+1} = u_{2n+1}$. Aussi, elle ne peut admettre de limite (cela contredirait l'unicité de la limite d'une suite), d'où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

En d'autres termes, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux sous-suites convergentes vers deux limites différentes, donc diverge, ou encore la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet e et $1/e$ pour valeurs d'adhérence, donc diverge.

Petit problème 3: Le flocon de Van Koch

On considère une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de figures planes convexes générées de la façon suivante: F_0 est un triangle équilatéral de côté a (avec $a > 0$). On construit F_1 en divisant chaque segment de F_0 en trois parties égales: on construit alors un triangle équilatéral extérieur à la figure sur la partie du milieu et on supprime celle-ci. Aussi, F_1 est-il une étoile régulière à six branches (cf figure).
Pour construire F_{n+1} à partir de F_n, on divise chaque segment de F_n en trois parties égales: on construit alors, sur chaque partie centrale, un triangle équilatéral extérieur à la figure et on supprime cette partie.
La figure ci-dessous donne les figures F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.



Dans la suite, on désigne par N_n, L_n, P_n et A_n respectivement le nombre d'arêtes, la longueur d'une arête, le périmètre et l'aire de la figure F_n. Ainsi, nous avons $N_0 = 3$, $L_0 = a$, $P_0 = 3a$ et $A_0 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

1. Précisez les valeurs de N_1, L_1, P_1 et A_1.
2. Etablir une formule donnant N_{n+1} en fonction de N_n, et une autre donnant L_{n+1} en fonction de L_n. En déduire, pour tout n, l'expression de N_n et de L_n en fonction de n et a.

3. Montrer que $P_n = \frac{4^n}{3^{n-1}}a$. Déterminer la nature ainsi que l'éventuelle limite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Exprimer A_n comme la somme d'aire de triangles, et montrer que

$$A_n = A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9}\frac{1-(4/9)^n}{1-4/9}a^2$$

5. Déterminer la nature ainsi que l'éventuelle limite de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Soit F la figure obtenue comme limite des figures $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle propriété a t'on sur F ?

Solution

1. Nous avons $N_1 = 9$, $L_1 = \frac{1}{3}a$, $P_1 = 9 \times \frac{a}{3} = 3a$. Nous savons que la formule de l'aire d'un triangle est $Aire = \frac{Base\ \times\ Hauteur}{2}$. On peut aisément calculer la longueur de la hauteur à l'aire du théorème de Pythagore: le triangle étant équilatéral, la hauteur est aussi médiatrice, d'où $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$. Il s'ensuit alors que $A_1 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4\times 3^2}$.

2. Une arête de F_n donne naissance à 4 arêtes dans F_{n+1}. Aussi, en déduisons-nous que $N_{n+1} = 4N_n$. Comme $N_0 = 1$ il s'ensuit que $N_n = 4^n$.
Soit une arête de F_n: elle donne donc naissance, dans F_{n+1} à 4 arêtes de longueur $L_{n+1} = \frac{1}{3}L_n$. Aussi, comme $L_0 = a$ nous en déduisons que $L_n = \frac{a}{3^{n-1}}$.

3. Comme $P_n = L_n \times N_n$, nous avons $P_n = 4^n \times \frac{a}{3^{n-1}} = \frac{4^n a}{3^{n-1}}$. Comme $\frac{4^n}{3^{n-1}} = 4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ et que $\frac{4}{3} > 1$ il s'ensuit que $P_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

4. Partons donc de F_n. Par découpage, l'aire de F_{n+1} est égale à celle deF_n augmenté de l'aire de 4^n triangles équilatéraux construits. Chacun d'eux ayant pour aire $\frac{\sqrt{3}}{4}L_n^2 = \frac{\sqrt{3}a^2}{3^{2n-2}}$. $a_{n+1} = a_n + 4^n \times \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{9}\right)^{n+1}$. Par telescopage, nous obtenons que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9^2} + \ldots + \tfrac{4^n}{9^{n+1}}\right) \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{4\times 9}\left(1 + \tfrac{4}{9} + \ldots + \left(\tfrac{4}{9}\right)^n\right) \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{4\times 9} \times \tfrac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}} \end{aligned}$$

5. Comme $4/9 < 1$, nous en déduisons que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$, d'où par le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes nous déduisons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite $\frac{3}{20}$.

6. En passant à la limite F de la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ de courbes, nous obtenons une courbe de longueur infinie mais dont l'aire (définie entre F et $[AB]$) est finie ... ce qui est assez étonnant!

Petit problème 4: Irrationnalité de e et application

A. Etude de deux suites

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$.

1. Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

2. En déduire qu'elles sont convergentes et ont même limite. Dans la suite, nous noterons ℓ cette limite commune.

B. Calcul exact de ℓ

Soit n un entier naturel $n \geqslant 1$. On pose, pour tout réel $x \in [0;1]$, $f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$.

1. (a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $[0;1]$ et que $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$. En déduire que $u_n \leqslant e$.
2. On pose, pour tout $x \in [0;1]$, $g(x) = f(x) + \frac{x}{n!}$.
   (a) Calculer $g'(x)$ et montrer que g est croissante sur $[0;1]$.
   (b) En déduire que $e - \frac{e}{n!} \leqslant u_n$.
   (c) En déduire la valeur exacte de ℓ.

C. Irrationnalité de e

On suppose dans cette question que e est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels p et q tel que $e = \frac{p}{q}$.

(a) Justifier que $u_q < \frac{p}{q} < v_q$.
(b) Montrer que $N = pq! - qq!u_q$ est un entier naturel vérifiant $0 < N < 1$.
(c) En déduire l'irrationnalité de e.

D. Application: Etude de la complétude de $\mathbb{Q}$

Soient n et m deux entiers naturels vérifiants $m \geqslant n \geqslant 1$.

1. Montrer que
$$u_m - u_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\frac{1 - \frac{1}{(n+2)^{m-n}}}{1 - \frac{1}{n+2}}$$
2. En déduire que la suite (u_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$.
3. On rappel qu'un espace E est dit *complet* si toute suite de Cauchy à valeurs dans E admet une limite dans E. est convergente.
   $\mathbb{Q}$ est-il complet ?

Solution: Irrationnalité de e et application

A. Etude de deux suites

1. La suite (u_n) est strictement croissante puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Etudions alors la monotonie de (v_n).
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n\cdot n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n\cdot n!} \\ &= \frac{1}{n(n+1)\cdot(n+1)!}\left(n(n+1) + n - (n+1)^2\right) \\ &= \frac{-1}{n(n+1)\cdot(n+1)!} \end{aligned}$$
   Nous en déduisons alors que la suite (v_n) est strictement décroissante.
2. Comme $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$, nous en déduisons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Aussi, elles sont convergentes et ont même limite. Soit ℓ celle-ci.

B. Calcul exact de ℓ

1. (a) $f(0) = 1$ et $f(1) = u_n e^{-1}$.

 (b) La fonction f est dérivable d'après le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Nous avons alors $f'(x) = \left(\frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right) e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}$
 Aussi, la fonction f est-elle décroissante sur $[0;1]$: on en déduit alors que $f(0) \geqslant f(1)$ soit $1 \geqslant u_n e^{-1}$ d'où $e \geqslant u_n$.

2. (a) La fonction g est dérivable comme somme de deux fonctions dérivables sur $[0,1)$ et nous avons $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{n!} = \frac{1-x^n}{n!}$. Aussi, la fonction g' est-elle positive sur $[0;1]$: il s'ensuit que la fonction g est croissante sur cet intervalle.

 (b) De la croissance de g sur $[0;1]$, nous déduisons que $g(0) \leqslant g(1)$ soit $1 \leqslant u_n e^{-1} + \frac{1}{n!}$. Il s'ensuit alors que $e - \frac{e}{n!} \leqslant u_n$.

 (c) Des questions précédentes, nous déduisons que $e - \frac{e}{n!} \leqslant u_n \leqslant e$. Aussi, par le théorème des gendarmes, il s'ensuit que la suite (u_n) est convergente et de limite e. Par unicité de la limite, nous avons $\ell = e$.

C. Irrationnalité de e

(a) Les suites (u_n) et (v_n) étant adjacentes et de limite $e = \frac{p}{q}$, nous déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant e \leqslant v_n$. Or, par stricte monotonies des suites (u_n) et (v_n), nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq e$ et $v_n \neq e$. Il s'ensuit donc que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < e < v_n$. En particulier pour $n = q$, nous obtenons $u_q \leqslant \frac{p}{q} \leqslant v_q$.

(b) Nous savons que $u_q = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$. Or, si $0 \leqslant k \leqslant q$, $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$, d'où $q! u_q \in \mathbb{N}$. Par suite, nous déduisons que $N = p \cdot q! - q \cdot q! \cdot u_q \in \mathbb{Z}$. Reste alors à montrer que $0 < N < 1$. Partons de l'encadrement $u_q < \frac{p}{q} < v_q = u_q + \frac{1}{q \cdot q!}$. En multipliant chacun de ces termes par $q \cdot q!$, nous déduisons que $q \cdot q! \cdot u_q < p \cdot q! < q \cdot q! \cdot u_q + 1$, d'où $0 < N < 1$.

(c) Nous obtenons ainsi une absurdité puisqu'il n'existe aucun entier strictement compris entre 0 et 1. Aussi, nous déduisons par raisonnement par l'absurde que e est irrationnel.

D. Application: Etude de la complèture de $\mathbb{Q}$

1.
$$\begin{aligned} u_m - u_n &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!} \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{m-n}}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^{m-n}}}{1 - \frac{1}{n+2}} \end{aligned}$$

2. Nous pouvons majorer $\frac{1 - \frac{1}{(n+2)^{m-n}}}{1 - \frac{1}{n+2}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}}$. Nous en déduisons alors que $u_m - u_n \leqslant \frac{n+2}{(n+1) \cdot (n+1)!}$. Or, la suite $\left(\frac{n+2}{(n+1) \cdot (n+1)!}\right)$ est une suite convente vers 0: aussi, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant N$, $\frac{n+2}{(n+1) \cdot (n+1)!} \leqslant \varepsilon$.
 Il s'ensuit alors que $\forall m \geqslant n \neq N$, $0 \leqslant u_m - u_n \leqslant \varepsilon$ d'où la suite (u_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$.

3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet puisque la suite (u_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (sa limite, e, est irrationnel). Aussi, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Pbr 2, Capes 2014: Série harmonique, Convergence au sens de Césaro

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{R}_+^*$ l'intervalle $]0;+\infty[$. La partie imaginaire du nombre complexe z est noté $Im(z)$.

Préambule Dans tout le problème, les suites considérées sont à valeurs réelles. La partie A aborde la convergence des suites monotones et aboutit à quelques résultats sur la série harmonique. Les parties B et C envisagment l'étude de la convergence au sens de Césaro et son lien avec la convergence au sens usuel.

Partie A

I. Questions de cours

1. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, alors elle converge.
3. Etablir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite décroissante soit convergente.

II. On considère la suite définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Donner une interprétation graphique de a_n à partir de la fonction inverse sur l'intervalle $[1; n+1]$.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{2n} - a_n \geqslant \frac{1}{2}$.
   (b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente.
3. Recherche d'un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel k non nul,
   $$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}$$
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant a_n$.
   (c) En déduire un équivalent de a_n au voisinage de $+\infty$.
4. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = a_n - \ln(n)$. A l'aide des questions **II.3.a** et **II.3.b**, démontrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Partier B. Sommation au sens de Césaro

A toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \geqslant 1$, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente au sens de Césaro si la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

I.

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de limite nulle et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
   (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,
   $$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$$

(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. Enoncer et démontrer la généralisation du résultat précédent au cas où la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ quelconque.

II. Application à la recherche d'équivalent On considère la suite définie âr $x_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $0 < x_n < 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
3. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
4. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1+x_n}$$
5. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que (u_n) converge vers 1.
6. Exprimer v_n en fonction de x_{n+1} et x_1 et en déduire un équivalent de x_n au voisinage de $+\infty$.

III. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle.

1. On suppose que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Montrer que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ converge.
2. On suppose que la suite $(x_{n+1} - x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un nombre réel ℓ.
   (a) Montrer que la suite $\left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.
   (b) Etuder la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans le cas où $\ell \neq 0$.
   (c) Dans le cas où $\ell = 0$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle nécessairement convergente ?

Partie C

I. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Etudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Conclure quant à la validité de la réciproque de la proposition énoncée à la question **I.2** de la partie B.

II. Soit α un réel. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sin(n\alpha)$ et $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Etudier la nature des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $\alpha \equiv 0 \mod \pi$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $c_n = \cos(n\alpha)$. Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de c_{n+1} et $u_{n+2} + u_n$ en fonction de u_{n+1}.
3. On suppose dans cette question que $\alpha \not\equiv 0 \mod \pi$.
   (a) On fait l'hypothèse que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. En utlisant les deux relations établies à la question **II.2** démontrer qu'alors la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ converge également et préciser les limites des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$.
   (b) Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

(c) En remarquant que $\sin(k\alpha) = Im\left(e^{ik\alpha}\right)$, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et donner la valeur de sa limite.

III. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

1. Démontrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité $n \cdot u_{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.
2. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \leqslant 2v_{2n} - v_n$.
3. Etablir la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et préciser sa limite.
4. Enoncer la propriété ainsi démontrée sous la forme d'une condition nécessaire et suffisante.

Solution: Pbr 2, Capes 2014

Partie A

I. Questions de cours

1. Supposons (u_n) croissante et non majorée. Aussi, $\forall A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \geqslant A$. Or, par croissante de la suote $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous déduisons que $\forall n \geqslant N$, $u_n \geqslant A$: aussi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Considérons alors l'ensemble $\mathcal{A} = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs prises par la suite $(au_n)_{n\geqslant 1}$. Cet ensemble est non vide (il contient par exemple la valeur u_1) et majoré par M. Il s'ensuit donc que l'ensemble $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure: soit α celle-ci.
Démontrons que la suite (u_n) converge vers α. Soit $\varepsilon > 0$. Aussi, puisque $\alpha = Sup(\mathcal{A})$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha - \varepsilon < u_N \leqslant \alpha$. La croissance de la suite (u_n) et le fait que $\mathcal{A}$ soit majoré par M implique que $\forall n \geqslant N$, $\alpha - \varepsilon < u_n \leqslant \alpha$. Il s'ensuit alors que $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ et donc la suite (u_n) est convergente et de limite α.

3. Nous venons de démontrer qu'une suite croissante converge si et seulement si elle est majorée. Aussi, en considérant la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, nous en déduisons qu'une suite décroissante et convergente si et seulement si elle est minorée.

II.

1. Traçons la courbe représentative de la fonction inverse et approximons l'aire sous la courbe par des rectangles de base $[k; k+1]$ et de hauteur $f(k) = \frac{1}{k}$. L'aire totale de ses rectangles est alors a_k.

2. (a) $a_{2n} - a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \quad - \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

   (b) La suite (a_n) est alors divergente. En effet, démontrons par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $a_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$.
   Initialisation: Pour $n = 1$, nous avons $a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{2}$.
   Hérédité: Supposons que, pour $n \geqslant 1$, $a_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$. D'après la question précédente, nous avons $a_{2^{n+1}} - a_{2^n} \geqslant \frac{1}{2}$, d'où $a_{2^{n+1}} \geqslant a_{2^n} + \frac{1}{n} \geqslant \frac{n+1}{2}$, d'où l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion: Nous en déduisons que $\forall n \geqslant 1$, $a_2^n \geqslant \frac{n}{2}$.
   De la divergence vers $+\infty$ de la suite (2^n) nous déduisons que, $\forall A \in \mathbb{R}_+$, il existe N tel que $a_{2^N} \geqslant A$. La croissance de la suite (a_n) implique que $\forall n \geqslant 2^N$, $a_n \geqslant A$. Aussi, la suite (a_n) est-elle divergente vers $+\infty$.

3. (a) Par décroissance de la fonction inverse sur l'intervalle $[k; k+1]$ (avec $k \geqslant 1$), nous déduisons que $\forall t \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. En intégrant cette relation pour $t \in [k; k+1]$, par croissance de l'intégrale, nous déduisons que $\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$ d'où $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leqslant \frac{1}{k}$.

   (b) L'encadrement précédent implique $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$. En sommant ces relations pour k variant de 1 à $n-1$, nous déduisons que $a_n - 1 \leqslant \ln(n) - \ln(1) \leqslant a_{n-1}$. La suite (a_n) étant croissante, $a_{n-1} \leqslant a_n$ d'où pour $n \geqslant 1$, $a_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant a_n$.

   (c) Réécrivons l'encadrement par $\ln(n) \leqslant a_n \leqslant \ln(n) + 1$; en divisant par $\ln(n)$, nous obtenons $1 \leqslant \frac{a_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$. Il s'ensuit alors, en faisant tendre $n \to +\infty$, que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\ln(n)} = 1$. Aussi, les suites $(\ln(n))$ et (a_n) sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

4. Nous déduisons du précédent encadrement que $0 \leqslant b_n \leqslant 1$. Etudions alors la monotonie de la suite (b_n). $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant 0$ d'où la suite (b_n) est décroissante. On en déduit alors que la suite (b_n) est décroissante et minorée, donc convergente.

Partier B. Sommation au sens de Césaro

I.

1. (a) Fixons $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) étant de limite nulle, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$ soit $-\varepsilon \leqslant u_n \leqslant \varepsilon$. Aussi, séparant la somme $\sum_{k=1}^n u_k$ en deux sommes $sum_{k=1}^{n_0} u_k \quad + \quad \sum_{k=n_0+1}^n u_k$ nous obtenons que

$$\sum_{k=1}^{n_0} u_k - (n-n_0)\varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n_0} u_k + (n-n_0)\varepsilon$$

   En divisant par $\frac{1}{n}$ nous obtenons alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k - \frac{n-n_0}{n}\varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k + \frac{n-n_0}{n}$$

   Enfin, comme $\frac{n-n_0}{n} \leqslant 1$, nous obtenons l'encadrement

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \varepsilon$$

   (b) Puisque n_0 est fixé, la somme $\sum_{k=1}^{n_0} u_k$ est une constante. Aussi, en faisant tendre $n \to +\infty$, nous obtenons que (v_n) est convergente et de limite nulle.

2. Supposons que (u_n) soit convergente et de limite ℓ. Nous pouvons appliquer le résultat précédent à la suite $(u_n - \ell)$: nous obtenons que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k \quad - \ell\right)$ converge vers 0 ce qui implique que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k\right)$ converge vers ℓ.

II. Application à la recherche d'équivalent

1. *Remarque: La première idée est d'utiliser les encadrements et un raisonnement par récurrence, qui ici ne marche pas: dommage! La seconde idée est d'obtenir cet encadrement au moyen de l'étude d'une fonction.*
   Considérons la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{x(1+x)}{1+2x}$. La fonction f est dérivable sur $[0; 1]$ d'après le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables et nous avons $f'(x) = \frac{2x^2+2x+1}{(1+2x)^2} > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; 1]$. Or, $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{2}{3} < 1$. Aussi, démontrons par récurrence que $0 < x_n < 1$.
   Initialisation: $u_1 = 1$ donc $x_2 = f(x_1) \in]0, 1[$. La propriété est vraie au rang $n = 2$.
   Hérédité: Supposons que, pour $n \geqslant 2$ fixé, $x_n \in]0; 1[$. Alors $x_{n+1} = f(x_n) \in]0; 1[$ d'où $0 < x_{n+1} < 1$.
   Conclusion: Nous en déduisons que $\forall n \geqslant 2$, $0 < x_n < 1$.

2. Nous avons $f(x) - x = \frac{x(1+x)}{1+2x} - x = \frac{-x^2}{1+2x}$, d'où $\forall x \in]0,1[$, $f(x) < x$. Il s'ensuit donc que $\forall n \geqslant 2$, $x_{n+1} = f(x_n) \leqslant x_n$. La suite (x_n) est donc décroissante.

3. La suite (x_n) est donc décroissante et minorée par 0: aussi est-elle convergente. Soit ℓ sa limite. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}$, nous obtenons que $\ell = \frac{\ell(1+\ell)}{1+2\ell}$ soit $\ell^2 = 0$ et donc $\ell = 0$. Aussi, la suite (x_n) converge vers 0.

4. $$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n}{x_n(1+x_n)} - \frac{1}{x_n} = \frac{1+2x_n-(1-x_n)}{x_n(1+x_n)} = \frac{1}{1+x_n}$$

5. D'après la question **II.3**, nous savons que (x_n) converge vers 0 quand $n \to +\infty$. Aussi, nous en déduisons d'après la continuité de la fonction $x \to \frac{1}{1+x}$ en 0, que $\left(\frac{1}{x_n+1}\right)$ converge vers 1 quand $n \to +\infty$.

6. Par procédé telescopique, nous avons $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_1}\right)$. Comme $\frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$ nous déduisons que $\frac{1}{nx_{n+1}} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Il s'ensuit alors que les suites x_n est équivalent à $\frac{1}{n-1}$.

III.

1. Par théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, nous déduisons que la suite $(x_{n+1} - x_n)$ est convergente et de limite nulle.

2. (a) Posons $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ et $u_k = x_{k+1} - x_k$. La suite (u_k) étant de limite ℓ, nous avons par **B.I.b** que (v_n) est convergente et de limite ℓ. Or, $v_n = \frac{1}{n}(x_{n+1} - x_1)$. Comme $\frac{x_1}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, nous déduisons que la suite de terme général $\frac{x_{n+1}}{n}$ converge vers ℓ. Il s'ensuit alors que $\frac{x_{n+1}}{n+1} \to 0$ et donc $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ est une suite convergente de limite ℓ.
   (b) Si $\ell \neq 0$, la suite (x_n) diverge vers $\pm\infty$ (selon le signe de ℓ).
   (c) Si $\ell = 0$, il n'y a pas nécessairement convergence, comme le montre par exemple la suite $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En effet, nous avons $x_{n+1} - x_n \to 0$ et pourtant la suite (x_n) est divergente.

Partie C

I.

1. Remarquons que $v_{2n} = 0$ et $v_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$ d'où la suite (v_n) converge vers 0.

2. La réciproque est donc fausse: on peut avoir (v_n) convergente et (u_n) divergente.

II.

1. Si $\alpha \equiv 0 \mod \pi$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(n\alpha) = 0$. Aussi, les suites (u_n) et (v_n) sont nulles.

2. $u_{n+2} - u_n = \sin((n+2)\alpha) - \sin(n\alpha) = \sin((n+1)\alpha)\cos(\alpha) + \cos((n+1)\alpha)\sin(\alpha) - \sin((n+1)\alpha)\cos(\alpha) + \cos((n+1)\alpha)\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos((n+1)\alpha) = 2c_{n+1}\sin(\alpha)$.

   $u_{n+2} + u_n = \sin((n+2)\alpha) + \sin(n\alpha) = \sin((n+1)\alpha)\cos(\alpha) + \cos((n+1)\alpha)\sin(\alpha) + \sin((n+1)\alpha)\cos(\alpha) - \cos((n+1)\alpha)\sin(\alpha) = 2\sin((n+1)\alpha)\cos(\alpha) = 2u_{n+1}\cos(\alpha)$.

3. (a) Supposons (u_n) convergente et désignons par ℓ sa limite. Alors la suite $(u_{n+2} - u_n)$ est convergente et de limite nulle. Comme $\sin(\alpha) \neq 0$, il s'ensuit alors que (c_n) est une suite convergente et de limite nulle.
   Nous avons $u_{n+2} + u_n = 2u_{n+1}\cos(\alpha)$. Aussi, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, nous en déduisons que $2\ell = 2\ell\cos(\alpha)$ soit $\ell(1 - 2\cos(\alpha)) = 0$. Si $\alpha \not\equiv 0 \mod \pi$, alors $\cos(\alpha) \neq 0$ et donc $\ell = 0$.
   On en déduit donc que les suites (u_n) et (c_n) sont convergentes et de limites nulles.

(b) Si $\alpha \not\equiv 0 \mod \pi$, et si (u_n) converge, alors (u_n) et (c_n) sont de limites nulles. Or, $u_n = \cos(n\alpha)$, $c_n = \cos(n\alpha)$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 + c_n^2 = 1$. Par passage à la limite, nous obtenons que $1 = 0$, ce qui est absurde. Aussi, lorsque $\alpha \not\equiv 0 \mod \pi$, la suite (u_n) est divergente.

(c) $\alpha \neq \pi\mathbb{Z}$ donc $\sin(\alpha) \neq 0$.

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Im\left(e^{ik\alpha}\right) = \frac{1}{n} Im\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha}\right)$$

Nous reconnaissons alors la somme d'une série géométrique de raison $e^{i\alpha}$. Aussi, nous avons $v_n = \frac{1}{n} Im\left(e^{i\alpha}\frac{1-e^{in\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right)$. Or,

$$e^{i\alpha}\frac{1-e^{in\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = e^{i\alpha}\frac{e^{in\alpha/2}}{e^{i\alpha/2}} \times \frac{e^{-in\alpha/2} - e^{in\alpha/2}}{e^{-i\alpha/2} - e^{i\alpha/2}} = e^{i(n+1)\alpha/2}\frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

Aussi, nous en déduisons que

$$v_n = \frac{\cos((n+1)\alpha/2)}{n} \times \frac{\sin(n\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$

III.

1. De la croissance de la suite (u_n), nous déduisons que $\sum_{k=1}^{n} u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ d'où $nu_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.

2. Nous déduisons alors $nu_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{2n} u_k \; - \sum_{k=1}^{n} u_k = 2nv_{2n} - nv_n$. En divisant par n, nous obtenons l'inégalité souhaitée.

3. La suite (v_n) étant supposée convergente, nous en déduisons que la suite (v_{2n}) l'est aussi et a même limite. Aussi, la suite $(2v_{2n} - v_n)$ est donc convergente et a même limite que la suite (v_n). Aussi, cette suite et bornée. Aussi, la suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

   On utilise le fait que toute suite convergente soit bornée. C'est une condition nécessaire mais non suffisante puisque, par exemple, la suite $(-1)^n$ est bornée mais non convergente.

4. Soit (u_n) une suite croissante. La suite (u_n) est convergente si et seulement si elle converge au sens de Césaro.
   En effet, si (v_n) converge (ie. (u_n) converge au sens de Césaro) alors d'après la question précédente la suite (u_n) converge. Réciproquement, si (u_n) converge, d'après **B.I.2** nous savons que la suite (v_n) est convergente vers la même limite (vrai même si (u_n) n'est pas considérée croissante).

Borne sup. et applications

Partie 1: Généralités sur la borne supérieur

Soit $(E; \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné. Une partie A de E est dite **majorée** s'il existe $m \in E$ tel que $\forall a \in A$, $a \leqslant m$. On dit que $\alpha \in E$ est une borne supérieure de A si α est le plus petit des majorants de A.

1. Supposons que le sous-ensemble A de E admet un plus grand élément $a_0 = max(A)$ (ie. $\forall a \in A$, $a \leqslant a_0$). Montrer alors que A admet une borne supérieur.
   Que pensez-vous de la réciproque ? (ie. si A admet une borne supérieur, est-ce que A admet un plus grand élément ?).

2. Montrer que si A admet une borne supérieure, alors celle-ci est unique.

3. Montrer que α est une borne supérieur de A si et seulement si α est un majorant de A vérifiant $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $\alpha - \varepsilon < a \leqslant \alpha$.

4. Etudier les bornes inférieure et supérieure du sous-ensemble $\mathcal{A}$ suivant de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} | (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$$

Partie 2: Borne supérieure $\mathbb{Q}$

Dans cette partie, on considère l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$. On utilisera à loisir l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ainsi que les lois usuelles sur ces ensembles.

Soit $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{E}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un rationnel $M = \frac{p}{q}$ tel que $M = Sup(\mathcal{E})$.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2. On suppose dans cette question que $M \in \mathcal{E}$.

   (a) On note $\varepsilon = 2 - M^2$. Montrer que $\varepsilon > 0$.

   (b) En étudiant la nature de la suite $\left(\frac{2p}{qn} + \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tem que $0 < \frac{2p}{qN} + \frac{1}{N^2} < \varepsilon$.

   (c) Soit alors $M' = M + \frac{1}{N}$. Montrer que $M' \in \mathcal{E}$ et en déduire une contradiction.

3. On suppose dans cette question que $M \notin \mathcal{E}$.

   (a) On note $\varepsilon = M^2 - 2$. Montrer que $\varepsilon > 0$.

   (b) En étudiant la nature de la suite $\left(\frac{2p}{qn} - \frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N$, $0 < \frac{2p}{qn} - \frac{1}{n^2} < \varepsilon$.

   (c) Soit alors $M' = M - \frac{1}{n}$ avec $n \geqslant N$. Montrer que $M' \notin \mathcal{E}$ et en déduire une contradiction.

4. Conclure.

Dans la suite, nous utiliserons le fait que $\mathbb{R}$ admet la propriété de la borne supérieure, c'est-à-dire que tout ensemble non-vide et majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieur (ce n'est donc pas le cas de $\mathbb{Q}$).

Partie 3: Théorème des suites monotones

On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels qui est à la fois croissante et majorée dans $\mathbb{R}$ par M.

1. Soit $\mathcal{A} = \{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des valeurs de la suite (u_n).
   Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, notée α.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\alpha - \varepsilon < u_n \leqslant \alpha$.

3. En déduire la convergence de la suite (u_n) vers α.

Partie 4: Théorème des suites adjacentes

A présent, nous considérons deux suites de réels, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifiant les propriétés suivantes: la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est une suite décroissante et $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

1. Montrer que toute suite décroissante et de limite nulle est a termes positifs.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On notera ℓ_u et ℓ_v leur limite respective.
3. Montrer que $\ell_u = \ell_v$. On notera alors ℓ leur limite commune.
4. Montrer que, pour tout entier naturel n, nous avons l'encadrement $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Application: $\forall n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel $k > 0$, $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. En déduire que la suite (S_n) est convergente.

Solution:

Partie 1: Généralités sur la borne supérieur

1. Soit $a_0 = max(A)$ le plus grand élément de A. Alors, a_0 est un majorant de A puisque $\forall a \in A$, $a \leqslant a_0$. Par ailleurs, si M est un majorant de A, alors $a_0 \leqslant M$ puisque $a_0 \in A$. Aussi, a_0 est-il nécessairement le plus petit des majorants de A.

   La réciproque est fausse: par exemple, l'ensemble $\{1-1/n; n \in \mathbb{N}^*\}$ admet 1 pour borne supérieure mais n'admet pas de plus grand élément.

2. Supposons que α et α' soient deux bornes supérieures de A. Alors α et α' étant des majorants de A, on en déduit que $\alpha \leqslant \alpha'$ (puisque α est le plus petit des majorants de A) et $\alpha' \leqslant \alpha$, d'où $\alpha = \alpha'$. On en déduit alors l'unicité de la borne supérieure d'un ensemble.

3. Supposons déjà que α soit une borne supérieure de A: aussi est-ce le plus petit des majorants de l'ensemble A. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Alors il existe nécessairement $a \in A$ vérifiant $\alpha - \varepsilon < a \leqslant \alpha$: en effet sinon $\beta = \alpha - \varepsilon$ serait un majorant de A, ce qui contredit la minimalité de α (en tant que borne sup, c'est le plus petit des majorants de A).
   Réciproquement, supposons que α est un majorant de A vérifiant $\forall\varepsilon > 0$, $\exists a \in A$, $\alpha - \varepsilon < a \leqslant \alpha$. Montrons alors que α est le plus petit des majorants de A: pour ce faire, considérons $\varepsilon > 0$. Puisque par hypothèse il existe $a \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < a \leqslant \alpha$, on en déduit que $\forall\varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A. Aussi, α est-il le plus petit des majorants de A et donc est sa borne supérieure.
   On fera bien attention aux inégalités: l'une est large et l'autre est stricte! On ne peut pas les modifier...

4. Considérons $\mathcal{A} = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} | (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$. Déjà, il est aisé de voir que $2 \in \mathcal{A}$ $(2 = 1+1)$ et que 2 est un majorant de $\mathcal{A}$ (puisque $\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$; $\frac{1}{n} \leqslant 1$ et $\frac{1}{m} \leqslant 1$. Aussi nous en déduisons que $Sup(\mathcal{A}) = 2$.

   Intéressons-nous à présent à la borne inférieure de $\mathcal{A}$. On a clairement, $0 \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est minoré par 0.
   Montrons alors que 0 est le plus grand des minorants de $\mathcal{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $\left(\frac{1}{k}\right)$ tend vers 0 quand $k \to +\infty$, il existe N tel que $\forall n \geqslant N$, $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Il s'ensuit alors que $\frac{2}{N} \in \mathcal{A}$ (on prend $n = m = N$) et $\frac{2}{N} < \varepsilon$, d'où ε n'est pas un miniorant de $\mathcal{A}$. Il s'ensuit donc que 0 est le plus grand des minorants de $\mathcal{A}$ (puisque toute valeur $\varepsilon > 0$ strictement plus grande n'est plus un minorant de $\mathcal{A}$), d'où $inf(\mathcal{A}) = 0$.

Partie 2: Borne supérieure $\mathbb{Q}$

Soit $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$. Le but de cette question est de montrer que $\mathcal{E}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un rationnel $M = \frac{p}{q}$ tel que $M = Sup(\mathcal{E})$.

1. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: aussi, il existe deux entiers naturels p et q, premiers entre eux (on considère la fraction irréductible), tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. En élevant au carré, nous en déduisons que $\frac{p^2}{q^2} = 2$ d'où $p^2 = 2q^2$. Aussi, 2 est un divieur de p^2, donc un diviseur de p (puisque 2 est un nombre premier). Il s'ensuit qu'il existe p' tel que $p = 2p'$. En remplaçant, nous obtenons $(2p')^2 = 2q^2$ d'où $2p'^2 = q^2$ et donc 2 est un diviseur de q^2, donc un diviseur de q.
   Cela contredit alors le fait que p et q sont premiers entre eux, d'où $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

2. (a) Puisque, dans cette question, $M \in \mathcal{E}$, alors $M^2 < 2$ d'où $\varepsilon = 2 - M^2 > 0$.
   (b) La suite $\left(\frac{2p}{qn} + \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$. Aussi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{2p}{qN} + \frac{1}{N^2} \leqslant \varepsilon$.
   (c) Posons donc $M' = M + \frac{1}{N}$. Clairement $M' > M$. Comparons M'^2 avec 2 pour savoir si $M \in \mathcal{E}$ ou non:
   $$M'^2 = \left(\frac{p}{q} + \frac{1}{N}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} + 2\frac{p}{qN} + \frac{1}{N^2} < \underbrace{\frac{p^2}{q^2}}_{=2} + \varepsilon$$
   Il s'ensuit alors que $M' \in \mathcal{E}$, ce qui contredit le fait que M soit le plus grand des majorants ($M < M'$ et $M' \in \mathcal{E}$).
   Aussi, l'hypothèse $M \in \mathcal{E}$ est-elle fausse.

3. (a) On suppose que $M \notin \mathcal{E}$, donc $M^2 \geqslant 2$, soit $\varepsilon = M^2 - 2 \geqslant 0$. Néanmoins, comme M est un rationnel, $M \neq \sqrt{2}$, donc l'inégalité est stricte: on a donc $\varepsilon > 0$.
   (b) La suite $\left(\frac{2p}{qn} - \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant convergente et de limite nulle, nous en déduisons qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2p}{qN} - \frac{1}{N^2} < \varepsilon$. On en déduit que tout $n \geqslant N$ vérifie la même inégalité. Enfin, en prenant N suffisamment grand , $\frac{2p}{qN} > \frac{1}{N^2}$ d'où $\forall n \geqslant N$, $0 < \frac{2p}{qn} - \frac{1}{n^2} < \varepsilon$.
   (c) Posons $M' = M - \frac{1}{n}$ et comparons M'^2 avec 2:
   $$M'^2 = \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} - \frac{2p}{qn} + \frac{1}{n^2} \geqslant 2 - \varepsilon > 2$$
   Il s'ensuit donc que $M'^2 \notin \mathcal{E}$, ie. c'est un majorant de $\mathcal{E}$. Or, $M > M'$ donc cela contredit le fait que M soit le plus petit des majorants de $\mathcal{E}$.
   On en déduit ainsi que l'hypothèse $M \notin \mathcal{E}$ conduit à une contradiction.

4. Nous avons démontré que les 2 possibilités, soit $M \in \mathcal{E}$, soit $M \notin \mathcal{E}$ sont impossibles: aussi, l'hypothèse $M \in \mathbb{Q}$ est impossible. Aussi, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.
   Il faut bien comprendre cela: l'ensemble $\mathcal{E}$, en tant que sous ensemble de $\mathbb{R}$, admet une borne sup, à savoir $\sqrt{2}$, mais en tant que sous ensemble de $\mathbb{Q}$, il n'admet pas de borne supérieure.

Partie 3: Théorème des suites monotones

1. L'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide (il contient au moins une valeur u_0) et majoré par M: aussi, puisque $\mathbb{R}$ vérifie la propriété de la borne supérieure, l'ensemble $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ celle-ci.

2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après la caractérisation de la borne supérieure vue en Partie 1, il existe N tel que $\alpha - \varepsilon < u_N \leqslant \alpha$. Par croissance de la suite (u_n), nous déduisons que $\forall n \geqslant N$, $u_N \leqslant u_n$ et comme α est un majorant de (u_n), il s'ensuit que $\forall n \geqslant N$, $\alpha - \varepsilon < u_n \leqslant \alpha$.

3. On a donc: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$, $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ et donc la suite $(u_n - \alpha)$ converge vers 0, ce qui implique par le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, que la suite (u_n) converge vers α.

Partie 4: Théorème des suites adjacentes

1. Soit (w_n) une suite décroissante et de limite nulle. Pour montrer que tout les termes de (w_n) sont positifs, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe n_0 tel que $w_{n_0} < 0$. Alors par décroissante de (w_n), $\forall n \geqslant n_0$, $w_n \leqslant w_{n_0} < 0$. Cela contredit le fait que la suite (w_n) ai pour limite 0 (on utilise $\varepsilon = -w_{n_0}$ dans la condition de convergence de (w_n) vers 0 et on obtient une absurdité).

2. Remarquons déjà que la suite (u_n) étant croissante, la suite $(-u_n)$ est décroissante. Aussi, la suite $(v_n - u_n)$ est-elle décroissante et de limite nulle. Il s'ensuit par la question précédente que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$, d'où $u_n \leqslant v_n$.
   Comme (u_n) est croissante, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant v_n$. Aussi, la suite (v_n) est-elle décroissante et minorée: elle est donc convergente: soit ℓ_v sa limite.
   De même, comme (v_n) est décroissante, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_0$. Aussi, la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc d'après le théorème des suites monotones, elle est convergente: soit ℓ_u sa limite.

3. Nous savons que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Or, d'après le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, nous en déduisons que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \ell_v - \ell_u$. Aussi, par unicité de la limite (de la suite $(v_n - u_n)$), nous avons $\ell_v - \ell_u = 0$ soit $\ell_u = \ell_v$.

4. Montrons déjà que puisque (u_n) est croissante et de limite ℓ, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$. Pour ce faire, considérons la suite $(\ell - u_n)$: elle est décroissante et de limite nulle par le théorème d'opérations algébriques sur les limites. Aussi, par la question 1, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell - u_n \geqslant 0$ d'où $u_n \leqslant \ell$.
   Nous démontrons de même l'autre inégalité en considérant la suite $(v_n - \ell)$ qui est aussi décroissante et de limite nulle.

Application: $\forall n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Déjà, la suite (S_n) est clairement croissant. Remarquons que $\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. En sommant ces relations pour k variant de 1 à $n-1$, nous déduisons que

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$

   Aussi, nous déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant 2$. La suite (S_n) est donc croissante et majorée par 2, donc elle est convergente.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème des segments emboités

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par I_n le segment réel $I_n = [a_n; b_n]$ avec $a_n < b_n$ (en particulier, on ne considérera pas de segment vide). La *longueur* du segment $I_n = [a_n; b_n]$ est le réel positif $b_n - a_n$. On dit que le segment I_{n+1} est **emboîté** dans le segment I_n si $I_{n+1} \subset I_n$. Aussi, si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de segments emboîtés, alors nous avons pour tout entier n, $I_{n+1} \subset I_n$.

Dans la suite, on désigne par $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments emboités dont les longueurs tendent vers 0.

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Soit ℓ celle-ci.

2. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n; b_n] = \{\ell\}$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de réels, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes réelles m et M tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$.
Comme l'intervalle $I_0 = [m; M]$ possède tous les éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, au moins l'un des deux intervalles $[m, \frac{m+M}{2}]$ ou $[\frac{m+M}{2}; M]$ possède une infinité d'éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: soit I_1 cet intervalle.
On construit alors de même I_2, I_3, ... par le procédé suivant:
Si $I_n = [a_n; b_n]$ est supposé connu et possède une infinité de valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors au moins l'un des deux intervalles $[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}]$ ou $[\frac{a_n+b_n}{2}; b_n]$ possède une infinité d'éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on choisit alors cet intervalle pour I_{n+1}.

1. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$.

2. En déduire qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ.
Pour ce faire, on pourra considérer une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{\varphi(n)} \in I_n$.

3. Enoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass que vous venez de démontrer.

Solution:

Partie I: Théorème des segments emboités

1. Les segments $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant emboîtés, nous en déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_n \geqslant b_{n+1}$. Aussi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante alors que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, nous savons que la longueur des segments $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, d'où $\lim_{n\in+\infty} b_n - a_n = 0$: il s'ensuit donc que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, ces deux suites sont donc convergentes et ont même limite: soit ℓ celle-ci.

2. Démontrons cette égalité (d'ensemble) par double inclusion:
Nous savons (corollaire du théorème dtes adjacentes) que $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons l'encadrement $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ donc nous en déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\ell \in I_n$. Il s'ensuit donc que $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ d'où $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n; b_n]$.
Réciproquement, supposons que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n; b_n]$. Aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons l'encadrement $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ et par passage à la limite, le théorème de prolongement des inégalités implique que $\ell \leqslant x \leqslant \ell$, d'où $x = \ell$. Nous avons donc bien $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n; b_n] = \{\ell\}$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

1. Considérons I_n. En étudiant les deux cas, nous avons $I_{n+1} \subset I_n$ donc (I_n) est une suite de segments emboîtées. De plus la longueur de I_{n+1} est la moitiée de celle de I_n, d'où la longueur du segment I_n est égale à $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$. On en déduit que la suite des longueurs des segments I_n tend vers 0: il s'ensuit par le théorème des segments emboîtés qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$.

2. Il nous faut définir une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) qui converge (vers ℓ). Pour ce faire, remaquons que tout intervalle I_n contient une infinité de termes de la suite (u_n): aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un élément $u_{\varphi(n)} \in I_n$ avec $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. Définissons ainsi $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(n)} \in I_n$ et $\varphi(n) > \varphi(n-1)$. De l'encadrement $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ implique par théorème des gendarmes que la suite $(u_{\varphi(n)})$ est convergente et de limite ℓ.
On démontre ainsi le théorème de Bolzan Weiestrass: toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un compact amdet une sous-suite convergente.

Capes 2011, Epreuve 1, Problème 2
Autour du théorème des valeurs intermédiaires

I

1. Soit (w_n) une suite décroissante et de limite ℓ. Supposons par l'absurde qu'il existe un rang n_0 pour lequel $w_{n_0} < \ell$. La suite (w_n) étant décroissante, nous en déduisons que, pour tout $n \geqslant n_0$, $w_n \leqslant w_{n_0} < \ell$. En passant à la limite dans cette inégalité, nous obtenons par le théorème de prolongement des inégalités que $\ell \leqslant w_{n_0} < \ell$, ce qui est absurde (puisque $\ell < \ell$ l'est). Aussi, pour tout entier naturel n, nous avons $w_n \geqslant \ell$.

2. (a) La suite (u_n) étant supposée croissante, la suite $(-u_n)$ est décroissante. La somme de deux suites décroissantes étant aussi décroissante, nous en déduisons que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   (b) Considérons la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$. La suite suite (w_n) est donc décroissante et de limite nulle: aussi, par le résultat de la question **I.1**, nous déduisons que, pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 0$, c'est-à-dire $v_n - u_n \geqslant 0$.

(c) Nous savons que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$, soit $v_n \geqslant u_n$. La suite (v_n) étant décroissante, elle est majorée par v_0. Aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant v_0$, d'où $u_n \geqslant v_0$. La suite (u_n) étant croissante et majorée par v_0, elle est convergente d'après le théorème des suites monotones (rappelé dans l'énoncé).

De même, de la croissance de la suite (u_n), nous déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$. Or, comme $u_n \leqslant v_n$, nous déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leqslant v_n$, c'est-à-dire que la suite (v_n) est minorée par u_0. La suite (v_n) est donc décroissante et minorée: elle est donc convergente.

(d) Nous savons par hypothèse que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Or, les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, d'après le rappel de l'énoncé, nous avons que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Il s'ensuit alors que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

3. Soit (u_n) une suite d'éléments de $X \subset \mathbb{R}$ qui converge vers ℓ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue en ℓ.
Par continuité de f en ℓ, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $x \in X$ vérifie $|x-\ell| \leqslant \alpha$, alors $|f(x)-f(\ell)| \leqslant \varepsilon$.
Or, la suite (u_n) converge vers ℓ. Aussi, il existe un rang N à partir duquel, si $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha$. On en déduit alors que $\forall n \geqslant N$, $|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \varepsilon$.
Aussi, nous démontrons bien que la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.

Partie II: Propriété des valeurs intermédiaires

1. (a) Montrons par récurrence sur l'entier naturel n que a_n et b_n sont des éléments de $[a;b]$.
Initialisation: Pour $n = 0$, nous avons $a_0 = a$ et $b_0 = b$, donc $a_0, b_0 \in [a;b]$.
Hérédité: Supposons que, pour n fixé, nous ayons a_n, b_n éléments de $[a;b]$ et raisonnons par disjonction des cas.

1er cas: Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. De $a \leqslant a_n; b_n \leqslant b$ nous déduisons que $\frac{a+a}{2} \leqslant \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant \frac{b+b}{2}$ d'où $a_{n+1} \in [a,b]$. Comme $b_{n+1} = b_n \in [a;b]$, nous déduisons que a_{n+1} et b_{n+1} sont des élements de $[a;b]$.
2snd cas: Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$. Alors, $a_{n+1} = a_n \in [a;b]$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. Le même encadrement que précédemment conduit à $b_{n+1} \in [a;b]$.

Aussi, nous avons démontré par disjonctions des cas que a_{n+1} et b_{n+1} sont des éléments de $[a;b]$, d'où la propriété est héréditaire.
Conclusion: Nous en déduisons que, pour tout entier naturel n, a_n et b_n sont des éléments de $[a;b]$.

(b) Nous allons démontrer cette formule en raisonnant par disjonction des cas.
1er cas: si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$, alors

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

2snd cas: si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$, alors

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Nous déduisons donc du raisonnement par disjonction des cas que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1}-a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$.

(c) Démontrons déjà que, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$. Pour ce faire, nous raisonnons par récurrence sur l'entier naturel n.
Initialisation: Pour $n = 0$, nous avons $a_0 = a < b = b_0$ d'où la propriété est vraie au rang $n = 0$.
Hérédité: Supposons la propriété vraie à un rang n fixé, c'est-à-dire $a_n \leqslant b_n$ et démontrons là au rang $n + 1$. On remarque alors que nous avons les encadrements $\frac{a_n+b_n}{2} \geqslant \frac{a_n+a_n}{2} = a_n$ et $\frac{a_n+b_n}{2} \leqslant \frac{b_n+b_n}{2} = b_n$.
Aussi, en raisonnant par disjonction des cas, nous obtenons que:
1er cas: Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$, alors $a_{n+1} \leqslant b_n = b_{n+1}$.
2snd cas: Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$, alors $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \geqslant a_n = a_{n+1}$.
Ainsi, nous obtenons par disjonction des cas que $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$ d'où cette propriété est héréditaire.
Conclusion: Nous avons donc, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.

A présent que nous savons comparer a_n et b_n à tout rang n, montrons que (a_n) et croissante et (b_n) est décroissante. Pour ce faire, soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et raisonnons par disjonction des cas.
1er cas: Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$, alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \geqslant \frac{a_n+a_n}{2} = a_n$ et $b_{n+1} = b_n$ d'où l'on a bien $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.
2snd cas: Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant \frac{b_n+b_n}{2} = b_n$, d'où $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$.

On en déduit alors que, dans tous les cas, nous avons $a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$, impliquant que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

Nous savons enfin, par la question précédente que, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$. Une rapide récurrence nous donne alors que $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$, et le critère de convergence des suites géométriques implique que la suite $\left(\frac{b_0-a_0}{2^n}\right)$ converge vers 0. De l'encadrement $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{b_0-a_0}{2^n}$, le théorème des gendarmes implique la convergence de $(b_n - a_n)$ vers 0.

Aussi, les suites (a_n) et (b_n) sont bien adjacentes.

(d) Les suites (a_n) et (b_n) étant adjacentes, d'après la question **I.2** nous déduisons qu'elles sont convergentes et ont même limite: soit c leur limite commune. Des encadrements $a_n, b_n \in [a;b]$ vrai pour tout entier n (cf. question **II.1.a**) nous déduisons que la limite commune ℓ des suites (a_n) et (b_n) est un élément de $[a;b]$ (*propriété des ensembles fermés: toute suite convergente à valeur dans un fermé converge vers un élément de ce fermé*).

La fonction f étant continue sur $[a;b] \subset I$, nous déduisons de la question **I.3** que les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ sont convergentes et ont pour limite $f(c)$.

Reste alors à montrer que $f(c) = \lambda$ pour conclure au théorème. Pour ce faire, démontrons pa récurrence sur n que, pour tout n, $f(a_n) \leqslant \lambda \leqslant f(b_n)$.

Initialisation: Au rang $n = 0$, nous savons que $\lambda \in [f(a); f(b)]$ d'où $f(a_0) \leqslant \lambda \leqslant f(b_0)$. La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité: Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons-là au rang $n + 1$. Pour ce faire, nous devons (de nouveau) raisonner par disjonction des cas.

1ere cas: Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < \lambda$, alors comme $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, nous avons $f(a_{n+1}) \leqslant \lambda$ et comme $b_{n+1} = b_n$ nous avons $\lambda \leqslant f(b_{n+1})$ d'où l'encadrement $f(a_{n+1}) \leqslant \lambda \leqslant f(b_{n+1})$.

2snd cas: Si $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$, alors comme $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, nous obtenons $f(b_{n+1}) \geqslant \lambda$. Enfin, de $a_{n+1} = a_n$ et de l'hypothèse de récurrence, nous obtenons que $f(a_{n+1}) \leqslant \lambda$. Aussi, nous obtenons dans ce cas l'encadrement $f(a_{n+1}) \leqslant \lambda \leqslant f(b_{n+1})$.

Il s'ensuit donc du raisonnement par disjonction des cas que, pour tout entier n, nous avons $f(a_{n+1}) \leqslant \lambda \leqslant f(b_{n+1})$, d'où la propriété considérée est héréditaire.

Conclusion: Nous avons donc, pour tout entier naturel n, $f(a_n) \leqslant \lambda \leqslant f(b_n)$.

Par passage à la limite, nous obtenons $f(c) \leqslant \lambda \leqslant f(c)$ d'où $\lambda = f(c)$. On en déduit ainsi le théorème des valeurs intermédiaires (ie. il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \lambda$).

2. **Application 1: Théorème du point fixe**
Considérons la fonction auxiliaire $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par, $\forall x \in [a;b]$, $g(x) = f(x) - x$. Comme f est à valeurs dans $[a;b]$, nous avons $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ (f étant à valeurs dans $[a;b]$, $f(a) \geqslant a$). De même, nous avons $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. La fonction g étant continue comme somme de deux fonctions continues, nous déduisons du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$ d'où $f(c) - c = 0$. Aussi, f admet un point fixe $c \in [a;b]$.

3. **Application 2: Première formule de la moyenne**
Considérons la fonction auxiliaire g, définie pour tout $x \in [a;b]$ par $g(x) = \int_a^g f(t)g(t)dt - f(x)\int_a^b g(t)dt$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale, nous avons $g(x) = \int_a^b (f(t) - f(x))g(t)dt$.
La fonction f étant continue sur le compact $[a;b]$ elle est bornée et atteint ses bornes: aussi, il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) = Max_{x\in[a;b]} f(x)$. Nous déduisons alors, par positivité de l'intégrale que $g(x_0) \leqslant 0$ et $g(x_1) \geqslant 0$. Or, la fonction g est continue puisque la fonction f l'est, d'où par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$ d'où $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.

4. **Application 3** *Question difficile à passer sans s'inquièter*

(a) Considérons, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie pour tout $x \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ par $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.
Considérons la subdivision régulière de l'intervalle $[0, 1]$ en sous-intervalle de longueur $\frac{1}{n}$: $[0;1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$.
Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, l'évaluation de la fonction f_n en $\frac{k}{n}$ donne:

$$f_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En sommant ces relations pour k variant de 0 à $n - 1$, nous obtenons:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Distinguons alors deux cas:
1ere cas: Si tous les $f_n\left(\frac{k}{n}\right)$ sont nuls, alors on peut prendre pour c_n n'importe lequel des $\frac{k}{n}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Le $c_n = \frac{k}{n}$ ainsi défini vérifiera $f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{c_n}\right)$.
2snd cas: S'il existe au moins un $k_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $f\left(\frac{k_0}{n}\right) < 0$ et un $k_1 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $f\left(\frac{k_1}{n}\right) > 0$. Alors, par continuité de f_n (résultant de celle de f et du théorème de composition de fonctions continues), nous déduisons du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c_n \in \left[\frac{k_0}{n}; \frac{k_1}{n}\right] \subset \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f_n(c_n) = 0$ soit $f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{c_n}\right)$.

Nous déduisons ainsi, par disjonction des cas, qu'il existe toujours $c_n \in \left[0; 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{c_n}\right)$.

(b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$ et considérons donc la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\right]\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right)$. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un $c \in \left[0; 1 - \frac{1}{\alpha}\right]$ tel que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{\alpha}\right)$. En calculant la différence $f(c) - f\left(c + \frac{1}{\alpha}\right)$, nous obtenons $\alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right)\right) = 0$. Comme $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$, $\frac{2\pi}{\alpha} \notin 2\pi\mathbb{N}$ et donc $\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) \neq 1$. On en déduit alors que $\alpha = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $\alpha \in \mathbb{R}^*$.
Aussi, il n'existe par de $c \in \left[0; \frac{1}{\alpha}\right]$ tel que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{\alpha}\right)$.

Partie III: Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires

1. Soit donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0$, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Remarquons déjà que f est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$ et que f prends toutes ses valeurs sur tout intervalle de la forme $I_k = \left[\frac{1}{2(k+1)\pi}; \frac{1}{2k\pi}\right]$.
Montrons que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Pour cela, considérons a, b deux éléments de $\mathbb{R}$: sans perte de généralité, on peut supposer que $a < b$.
1er cas: Si $0 < a < b$ ou $a < b < 0$, alors la fonction f étant continue sur $[a; b]$ d'après le théorème de composition des fonctions continues, nous déduisons du théorème des valeurs intermédiaires que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
2eme cas: Supposons donc que $a \leqslant 0 < b$. Comme $0 < b$, pour k suffisamment grand, l'intervalle $I_k = \left[\frac{1}{2(k+1)\pi}; \frac{1}{2k\pi}\right]$ est contenu dans $[0; b]$. Or, la fonction f prends toutes les valeurs de $[-1; 1]$ sur I_k: aussi, quelque soit $\lambda \in [f(a); f(b)]$, il existe $x_k \in I_k$ tel que $f(x_k) = \lambda$ et donc f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ dans ce cas aussi.
3ieme cas: Si $a < 0 \leqslant b$ alors de même que dans le cas précédent, pour k suffisamment grand l'intervalle $\left[\frac{-1}{2k\pi}; \frac{-1}{2(k+1)\pi}\right]$ appartient à $[a; 0]$; comme la fonction $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ prend toutes les valeurs dans $[-1; 1]$ sur cet intervalle nous en déduisons que f véréfie la propriété $\mathcal{P}$ dans ce cas.

   Il s'ensuit alors que, par épuisement des cas, f vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

   Pourtant, montrons que la fonction f n'est pas continue en 0. Pour cela, considérons la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$. Alors, la suite (x_k) converge vers 0 et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) = \sin(\pi/2 + 2k\pi) = 1$ d'où la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $1 \neq f(0) = 0$. Nous déduisons alors du critère séquentiel de continuité que f n'est pas continue en 0.

2. Soit f dérivable sur $[a; b]$ telle que $f'(a) < f'(b)$ et soit $\lambda \in]f'(a); f'(b)[$. On considère la fonction g définie sur $I = [a; b]$ par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

   (a) Les fonctions f et $x \mapsto \lambda x$ étant dérivables sir I, la fonction g l'est aussi sur I, donc elle est en particulier continue sur ce segment. Aussi, elle y est bornée et atteint ses bornes: ainsi, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(x) = inf_{x\in[a;b]} g(x)$.

   (b) Montrons que $c \neq a$ et $c \neq b$. La fonction étant dérivable, nous avons $g'(x) = f'(x) - \lambda$ d'où $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$: la fonction g' est donc strictement décroissante sur un voisinage $[a; a + \varepsilon]$ de a: aussi, elle n'atteint pas son minimum en a. De même, de $g'(b) = f'(b) - \lambda > 0$ nous déduisons que g' est strictement croissante sur un voisinage $[b - \varepsilon; b]$. Aussi, elle n'atteint pas son minimum en b. Nous avons donc bien $a \neq c$ et $b \neq c$.

   (c) Ainsi, la fonction g atteint son minimum sur l'intervalle ouvert $]a; b[$. Cette fonction étant dérivable sur $[a; b]$, nous en déduisons alors que $g'(c) = 0$, d'où $f(c) = \lambda$. Ainsi, la fonction f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ (dites des valeurs intermédiaires).

   (d) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f|_{R_-^*} = 0$ et $f|_{R_+} = 1$. Alors f est discontinue en 0, donc ne vérifie par la propriété des valeurs intérmédiaires. Aussi, cette fonction ne peut admettre de primitive (sinon il existerai F dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F' = f$, et alors par le théorème de Darboux démontré à la question précédente, f vérifierait la propriété des valeurs intermédiaires, ce qui n'est pas).

3. *Question très difficile et sans intérêt pour la quasi totalité des lecteurs*
   Soit $a \in I$. Montrons que f est continue en a à gauche.
   Si pour tout $x \in I$, $x \leqslant a$, $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ alors la fonction f est continue à gauche en a.
   Sinon, il existe $x_0 \in I$, $x_0 < a$ tel que $|f(x_0) - f(a)| > \varepsilon$. Sans perte de généralité, on suppose $f(x_0) - f(a) > \varepsilon$. Comme f vérifie la propriété $\mathcal{P}$, il existe $x_1 \in [x_0; a]$ tel que $f(x_1) = f(a) + \varepsilon$. L'ensemble $f^{-1}(f(x_1))$ étant un fermé de $I \cap]-\infty; a]$, nous déduisons qu'il admet un plus grand élément: soit x_2 celui-ci. Nous avons donc $x_2 \in [x_1; a]$, $f(x_2) = f(a) + \varepsilon$. Aussi, $\forall x \in [x_2; a]$, $f(x) \neq f(a) + \varepsilon$. Supposons qu'il existe $x' \in [a_2; a]$ tel que $f(x') > f(a) + \varepsilon$, alors nous aboutissons à une contradiction car f doit vérifier la propriété $\mathcal{P}$, donc doit prendre toutes les valeurs de $[f(a); f(x')]$ sur $[x'; a]$, en particulier la valeur $f(x_2) = f(a) + \varepsilon$, ce qui contredirait la maximalité de x_2 dans l'intervalle $[x_0; a]$. On en déduit donc que $\forall x \in [x_2, a]$, $f(x) \leqslant f(a) + \varepsilon$. On raisonne de même pour prouver qu'il existe un intervalle à gauche de a dans lequel tous les x vérifient $f(x) \geqslant f(a) - \varepsilon$ et on conclut à la continuité à gauche de f en a.
   On procède de même à droite: la fonction f est alors continue en a, et donc sur I.