

Polynôme chromatique mixte et interprétation des coefficients

Jean-François Culus¹

Université Toulouse le Mirail, Equipe GRIMM - Smash
culus@univ-tlse2.fr

Résumé La coloration orientée est une adaptation possible de la notion de coloration aux graphes orientés. Poursuivant ce parallèle, le polynôme chromatique orienté $|\vec{P}(\vec{G}, -1)|$ du graphe orienté \vec{G} est une adaptation possible du polynôme chromatique $P(G, k)$ d'un graphe G . Le but de cet article consiste en l'obtention d'une interprétation similaire au résultat de Stanley relatif au polynôme chromatique classique, à savoir, interpréter $|P(G, -1)|$ comme le nombre d'orientations acircuitiques du graphe G . Pour ce faire, nous généralisons, déjà, les notions de colorations et colorations orientées aux graphes mixtes en introduisant la notion de coloration mixte. Celle-ci nous permet d'obtenir une adaptation possible du résultat de Stanley pour une sous-famille de graphes mixtes que nous explicitons. Nous montrons aussi une adaptations possible de cette interprétation à une sous-famille plus large de graphes mixtes.

Mots-Clefs. Graphe ; Coloration ; Polynôme chromatique.

1 Introduction

La notion de coloration a été largement étudiée depuis de nombreuses années ; nous renvoyons, par exemple, à [12,5] pour un aperçu plus complet sur le sujet. En 1912, Birkhoff introduit la notion de polynôme chromatique d'un graphe G , comme étant l'application qui à tout entier strictement positif k associe $P(G, k)$, le nombre de k -colorations d'un graphe G (cf [1,2]). C'est en 1973, dans [11], que Stanley interprète la valeur absolue du polynôme chromatique considéré en -1 d'un graphe G , en fonction du nombre d'orientations acircuitiques de ce même graphe. Ce résultat sera ensuite successivement amélioré par de nombreux auteurs ([3,?,4,?]), donnant des interprétations des différents coefficients du polynôme chromatique en termes d'orientations acircuitiques. La notion de coloration orientée est une généralisation possible de la notion de coloration classique aux graphes orientés. Cette notion a été introduite dans [10], et a ensuite fait l'objet d'intenses études afin d'adapter des notions classiques de la théorie de la coloration [8,6]. C'est dans [9] qu'est introduit la notion de polynôme chromatique orienté ; Eric Sopena y donne les premières propriétés de ce polynôme.

Le but de cet article est de poursuivre cette étude en tentant de trouver un résultat similaire à celui obtenu par Stanley relativement au polynôme chromatique classique. Pour ce faire, nous introduirons dans un premier temps la notion de coloration mixte (d'un graphe mixte), généralisant à la fois les notions de colorations classique et orientée. Nous l'étudierons dans la section 3, en la reliant aux précédentes colorations et en énonçant les principales caractéristiques du polynôme chromatique mixte. Dans un second temps, nous étudierons, dans la section 4, le lien entre la valeur absolue de l'évaluation du polynôme chromatique mixte d'un graphe mixte en termes d'orientations acircuitiques d'un graphe, généralisant le résultat de Stanley et l'adaptant à certains cas de graphes orientés.

2 Définitions

Nous considérerons, ici, des graphes $G = (V(G), E(G))$ simples (i.e. sans boucle ni arêtes parallèles). Une k -coloration d'un graphe G est une application $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ telle que, si les sommets x et y sont voisins dans G , alors $c(x) \neq c(y)$. Nous désignons par $P(G, k)$ le polynôme chromatique orienté, défini pour tout k positif, comme étant le nombre de k -coloration de G .

Soit $e = \{x, y\} \in E(G)$ une arête de G . Une orientation $o(e)$ de l'arête e est un élément de l'ensemble $\{(x, y), (y, x)\}$. Une orientation o d'un graphe G est la donnée d'une orientation de chacune de ses arêtes. On notera $o(G)$ le graphe orienté \vec{G} ainsi obtenu.

Nous désignerons par \vec{G} un graphe orienté $\vec{G} = (V(\vec{G}), A(\vec{G}))$. Une k -coloration orientée de \vec{G} est une application $c_o : V(\vec{G}) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que, si (x, y) et (z, t) sont des arcs de \vec{G} , $c_o(x) = c_o(t) \implies c_o(y) \neq c_o(z)$.

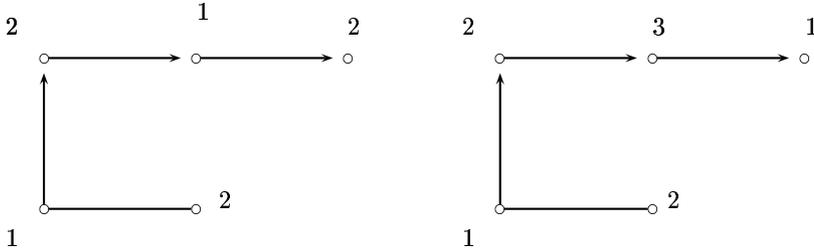
Une telle définition nous permet d'adapter la notion de polynôme chromatique dans le cadre des graphes

orientés (cf [9]). Si \vec{G} désigne un graphe orienté et k un entier positif, nous dénotons par $\vec{P}(\vec{G}, k)$ le nombre de k -colorations orientées de \vec{G} .

Enfin, nous dénotons par $G_m = (V(G_m), A(G_m), E(G_m))$ un graphe mixte. Nous n'autorisons pas les arcs parallèles (ni les boucles), mais un arc et une arête de G_m peuvent avoir même extrémités.

Une k -coloration mixte de G_m est une application $c_m : V(G_m) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que :

- i. $\forall \{x, y\} \in E(G_m)$ ou $\forall (x, y) \in A(G_m), c(x) \neq c(y)$,
- ii. $\forall (x, y), (z, t) \in A(G_m), c(x) = c(t) \Rightarrow c(y) \neq c(z)$



Exemple 1. La figure ci-dessus représente un graphe mixte G_m muni de deux applications de $V(G_m)$ dans $\{1, 2, 3\}$. L'application représentée en figure a. n'est pas une coloration mixte puisque nous avons une violation de la condition ii. L'application décrite figure b est, elle, bien une 3-coloration mixte du graphe mixte G_m .

Si G_m désigne un graphe mixte, nous désignons par $Und(G_m)$ le graphe simple (dit sous-jacent) obtenu par suppression des orientations des arcs et par suppression éventuelle des arêtes parallèles multiples. Un *chemin* (de x_0 à x_l) dans G_m est une suite (x_0, \dots, x_l) de sommets de G_m tels que $\forall i \in \{0, 1, \dots, l\}, (x_i, x_{i+1}) \in A(G_m)$. Un *circuit* de G_m est un chemin d'un sommet x_0 à lui-même. Le graphe G_m est dit *arcircuitique* s'il ne contient aucun circuit.

3 Coloration mixte d'un graphe mixte

Lions la définition précédente de coloration mixte c_m aux deux colorations : classique et orientée. A un graphe mixte $G_m = (V(G_m), A(G_m), E(G_m))$ nous associons les graphes G et \vec{G} , respectivement simple et orienté suivants : $G = (V(G_m), E(G_m))$ et $\vec{G} = (V(G_m), A(G_m))$.

Lemme 1 Soit $G_m = (V(G_m), A(G_m), E(G_m))$ un graphe mixte. L'application c_m est une k -coloration mixte de G_m si et seulement si les applications c et c_o définies par $\forall x \in V(G), c(x) = c_o(x) = c_m(x)$ sont respectivement des colorations classique et orientée de, respectivement $G = (V(G_m), E(G_m))$ et $\vec{G} = (V(G_m), A(G_m))$.

Ainsi, peut-on affirmer que la notion de coloration mixte étend les notions de colorations classique et orientée. En particulier, toute coloration d'un graphe G ou toute coloration orientée d'un graphe orienté \vec{G} est une coloration mixte respectivement du graphe mixte G et \vec{G} .

Soit G_m un graphe mixte. Nous désignons par $P_m(G_m, k)$ le *polynôme chromatique mixte* de G_m défini pour tout entier k positif, comme étant le nombre de k -colorations mixtes de G_m . Nous vérifierons ultérieurement que cette fonction est bien un polynôme (de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

Un graphe G ou qu'un graphe orienté \vec{G} peuvent être vus comme des graphes mixtes, nous obtenons :

Corollaire 1 Soit G un graphe simple et k un entier strictement positif.

$$P(G, k) = P_m(G, k)$$

Soit \vec{G} un graphe orienté et k un entier strictement positif.

$$\vec{P}(\vec{G}, k) = P_m(\vec{G}, k)$$

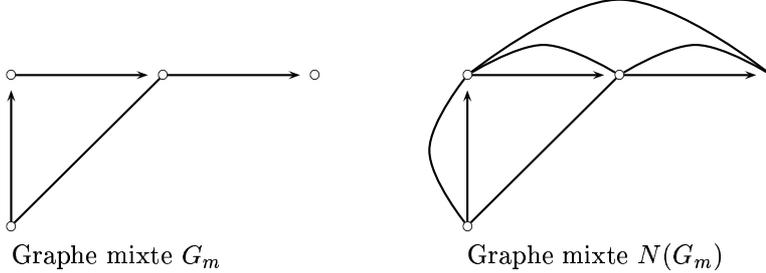
Ainsi, la notion de polynôme chromatique mixte généralise bien les notions de polynômes chromatiques classique et orienté. Ce corollaire nous permet d'obtenir quelques résultats, tels :

Si G_m est le graphe mixte vide (i.e. $E(G_m) = A(G_m) = \{\emptyset\}$) d'ordre n , $P_m(G_m, k) = k^n$.

Si G_m est un graphe mixte complet (i.e. $\forall x, y \in V(G_m), \{x, y\} \in E(G_m)$ ou $(x, y) \in A(G_m)$ ou $(y, x) \in A(G_m)$), alors $P_m(G_m, k) = k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$.

Dans [9] était soulignée l'existence de graphes orientés non-tournoi d'ordre n vérifiant $P_m(\vec{G}, k) = k(k-1)\dots(k-n+1)$. Nous allons associer au graphe mixte G_m le graphe mixte $N(G_m)$; celui-ci nous permet d'obtenir une caractérisation simple de tous les graphes (mixtes) dont le polynôme chromatique vérifie $P_m(G_m, k) = k(k-1)\dots(k-n+1)$.

Soit G_m un graphe mixte. Nous lui associons le graphe $N(G_m)$ défini par : $V(N(G_m)) = V(G_m)$; $A(N(G_m)) = A(G_m)$; $E(N(G_m)) = E(G_m) \cup \{\{x, y\} / \exists z \in V(G_m), (x, z), (z, y) \in A(G_m)\}$.



Lemme 2 Soit G_m un graphe mixte et k un entier strictement positif. Toute k -coloration mixte de G_m est une k -coloration mixte de $N(G_m)$.

Démonstration : Soient $x, y \in V(G_m)$ tels que $(x, y) \in A(G_m)$. Alors, toute coloration mixte c_m de G_m vérifie $c_m(x) \neq c_m(y)$. De même, s'il existe $z \in V(G_m)$ tel que $(x, z), (z, y) \in A(G_m)$, nous avons $c_m(x) \neq c_m(y)$. Ainsi, toute coloration mixte de G_m est-elle une coloration mixte de $N(G_m)$. La réciproque est évidente, puisque G_m est un sous-graphe mixte de $N(G_m)$. \square

Nous déduisons alors le corollaire suivant :

Corollaire 2 Pour tout entier k strictement positif :

$$P_m(G_m, k) = P_m(N(G_m), k)$$

Relativement à la caractérisation du polynôme chromatique mixte, nous avons :

Corollaire 3 Soit G_m un graphe mixte d'ordre n .

$$P(G_m, k) = k(k-1)\dots(k-n+1) \iff N(G_m) \text{ est un graphe mixte complet}$$

Les précédents corollaires impliquent que nous pouvons toujours considérer que les graphes mixtes que nous étudions sont N -maximaux, c'est-à-dire vérifient $N(G_m) = G_m$.

Nous pouvons finalement énoncer les principales propriétés du polynôme chromatique mixte, faisant écho à celles des polynômes classique et orienté.

Théorème 1 Soit G_m un graphe mixte N -maximum (i.e. $N(G_m) = G_m$).

Soit $e = \{x, y\} \notin E(G_m)$. Nous désignons par $G_m - e$ le graphe mixte obtenu en identifiant les sommets x et y de G_m et en remplaçant les arêtes multiples par une arête unique. Le graphe $G_m \cup e$ est défini comme le graphe G_m augmenté de l'arête e . Nous avons alors :

$$P_m(G_m, k) = P_m(G_m \cup e, k) + P_m(G_m - e, k)$$

Preuve : Partitionnons l'ensemble des colorations mixtes c_m de G_m en, d'une part, celles donnant même couleur aux sommets x et y et, d'autre part, en celles donnant des couleurs différentes à ces deux sommets.

Toute coloration mixte c_m de G_m telle que, $c_m(x) = c_m(y)$ est une coloration mixte de $G_m - e$.

Toute coloration mixte c_m de G_m telle que, $c_m(x) \neq c_m(y)$ est une coloration de $G_m \cup e$. \square

Théorème 2 Pour tout graphe mixte G_m d'ordre n , nous avons :

$P_m(G_m, k)$ est un polynôme d'ordre n en k .

Le coefficient dominant de ce polynôme est 1.

$P_m(G_m, k)$ n'a pas de terme constant.

Le coefficient de k^{n-1} dans $P(G_m, k)$ est égal à $-|E(Und(N(G_m)))|$.

Démonstration : Considérons, sans perte de généralité, un graphe mixte G_m N -maximal. $Und(G_m)$ désigne le graphe sous-jacent au graphe mixte G_m , obtenu par suppression de l'orientation des arcs de G_m et en identifiant les éventuelles arêtes parallèles.

Nous raisonnons par récurrence double, premièrement croissante sur l'ordre n du graphe G_m , secondement sur le nombre $|E(Und(G_m))|$. Les différentes propriétés énoncées sont vérifiées par les différents graphes mixtes d'ordre 2.

Soit, à présent, n un entier strictement supérieur à 2 et supposons ces propriétés vérifiées pour tout graphe mixte d'ordre $n - 1$.

Les propriétés précédentes sont vérifiées par les graphes mixtes complets d'ordre n , puisque si $E(Und(G_m)) = n(n - 1)/2$, alors nous avons : $P_m(G_m, k) = k(k - 1)(k - 2) \dots (k - n + 1)$.

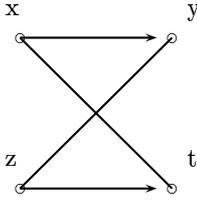
Soit m un entier strictement inférieur à $n(n - 1)/2$ et supposons l'ensemble des propriétés vérifiées pour tout graphe mixte d'ordre n tels que $|E(Und(G_m))| = m + 1$.

Par la formule de récurrence précédente, nous avons : $P_m(G_m, k) = P_m(G_m \cup e, k) + P_m(G_m - e, k)$. Par hypothèse de récurrence, $P_m(G_m \cup e, k)$ et $P_m(G_m - e, k)$ vérifient l'ensemble des propriétés précédentes. Après un simple calcul, nous en déduisons que $P_m(G_m, k)$ vérifie lui aussi l'ensemble de ces propriétés, et le théorème est donc vérifié au rang m . \square

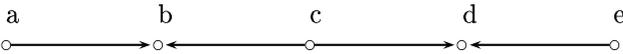
3.1 Formule par Exclusion / Inclusion

En nous inspirant du travail d'Eric Sopena dans [9], nous pouvons, à notre tour, exprimer le polynôme chromatique mixte de G_m comme somme de polynômes chromatiques (classiques) de sous-graphes de $Und(G_m)$. Pour ce faire, nous associons à un graphe mixte G_m l'ensemble $\mathcal{C}(G_m)$ suivant :

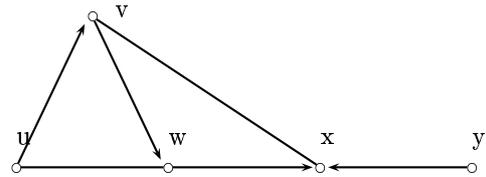
$$\mathcal{C}(G_m) = \{ \{(x, y), (z, t)\} \in A(G_m)^2 / \{y, z\} \text{ et } \{x, t\} \notin E(Und(G_m)) \}$$



De manière informelle, l'ensemble $\mathcal{C}(G_m)$ est l'ensemble des paires d'arcs pouvant contredire la propriété *ii*. de la coloration mixte. Donnons quelques exemples :



Graphe mixte G_1



Graphe mixte G_2

Le graphe mixte $\mathcal{C}(G_1) = \{ \{(a, b), (e, d)\} \}$.

Pour G_2 , nous avons $\mathcal{C}(G_2) = \{ \{(u, v); (y, x)\} \}$.

Si $Z = \{ \{(x_1, y_1), (z_1, t_1)\}, \dots, \{(x_k, y_k), (z_k, t_k)\} \}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(G_m)$, nous désignons par $Id(G_m, Z)$ le graphe obtenu, partant de $Und(G_m)$ en identifiant les sommets x_i avec les sommets t_i , et les sommets y_i avec les sommets z_i , pour tout $1 \leq i \leq k$. Une telle identification peut nous conduire à l'obtention d'un graphe ayant des boucles. Rappelons, que le polynôme chromatique d'un tel graphe, est nul.

Notons, enfin l'égalité $Id(G_m, \emptyset) = Und(G_m)$ Nous pouvons, à présent, énoncer le théorème suivant :

Théorème 3 Formule par Inclusion / Exclusion

Soit G_m un graphe mixte. Nous avons :

$$P_m(G_m, k) = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m)} (-1)^{|Z|} \times P(Id(G_m, Z), k)$$

Démonstration : Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que G_m est N -maximal (i.e. $G_m = N(G_m)$). Soit k un entier strictement positif.

L'ensemble $\mathcal{C}(G_m)$ est union de p paires d'arcs $\{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\} / \{y_j, z_j\}$ et $\{x_j, t_j\} \notin E(Und(G_m))$. Nous noterons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ les p éléments de $\mathcal{C}(G_m)$. Tout sous-ensemble Z de $\mathcal{C}(G_m)$ est union de α_l . Désignons par X , l'ensemble des k -colorations de $Und(G_m)$. Nous avons donc $|X| = |P(Und(G_m), k)|$. Parmi ces $P(Und(G_m), k)$ k -colorations de G_m , certaines sont des colorations mixtes de G_m , d'autres non. Le principe d'inclusion / exclusion va nous permettre de dénombrer les premières.

A une k -coloration c de $Und(G_m)$, nous associons le sous-ensemble $Z(c) \subset \mathcal{C}(G_m)$ défini par l'ensemble des paires d'arcs $\{(x_j, y_j), (z_j, t_j)\} \in \mathcal{C}(G_m)$ tels que $c(x_j) = c(t_j)$ et $c(y_j) = c(z_j)$. Une telle k -coloration c de $Und(G_m)$ est aussi une coloration mixte de G_m , si et seulement, si $Z(c) = \emptyset$.

Pour $1 \leq i \leq p$, nous dirons que la k -coloration c de $Und(G_m)$ vérifie la propriété P_i si $\alpha_i \in Z(c)$. Nous posons $A_i = \{c \text{ coloration de } Und(G_m) / c \text{ vérifie la propriété } P_i\} \subset X$. Remarquons que le nombre de k -colorations de $Und(G_m)$ vérifiant la propriété P_i est le nombre de k -colorations de $Id(G_m, \alpha_i)$, soit $P(Id(G_m, \alpha_i), k)$.

Soit Z un sous-ensemble de $\mathcal{C}(G_m)$. Le nombre de k -colorations de $Und(G_m)$ vérifiant $Z(c) = Z$ est égal au nombre de k -colorations vérifiant les propriétés $\{P_i\}_{i / \alpha_i \in Z}$, soit encore le nombre de k -colorations de $Id(G, Z)$, c'est-à-dire $P(Id(G, Z), k)$.

La formule d'inclusion / exclusion nous donne alors :

$$|\bigcup_{i=1}^p A_i| = \sum_{i=1}^p |A_i| - \sum_{i,j:i \neq j} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^p |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p|.$$

Nous remarquons alors que $\sum_{i=1}^p |A_i| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq 1} P(Id(G_m, Z), k)$.

$$\sum_{1 \leq i,j \leq p; i \neq j} |A_i \cap A_j| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq 2} P(Id(G_m, Z), k).$$

Plus généralement, pour $l \in \{1, 2, \dots, p\}$, nous obtenons la formule suivante :

$$\sum_{1 \leq i_1, i_2, \dots, i_l \leq p, i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_l} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq l} P(Id(G_m, Z), k).$$

Ainsi obtenons-nous : $|\bigcup_{i=1}^p A_i| = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq 1} (-1)^{|Z|+1} P(Id(G_m, Z), k)$.

Les k -colorations mixtes de G_m étant les k -colorations de $Und(G_m)$ telles que $Z(c) = \emptyset$, nous avons :

$$P_m(G_m, k) = |X \setminus (\bigcup_{i=1}^p A_i)| = P(Und(G_m), k) - |\bigcup_{i=1}^p A_i|$$

Soit $P_m(G_m, k) = P(Und(G_m), k) - \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m); |Z| \geq 1} (-1)^{|Z|+1} P(Id(G_m, Z), k)$. Or, comme $Und(G_m) = Id(G_m, \emptyset)$, donc $P_m(G_m, k) = \sum_{Z \subset \mathcal{C}(G_m)} (-1)^{|Z|} P(Id(G_m, Z), k)$.

Cette formule étant donc vraie pour tout k entier fixé strictement positif, l'égalité des deux polynômes est établie. \square

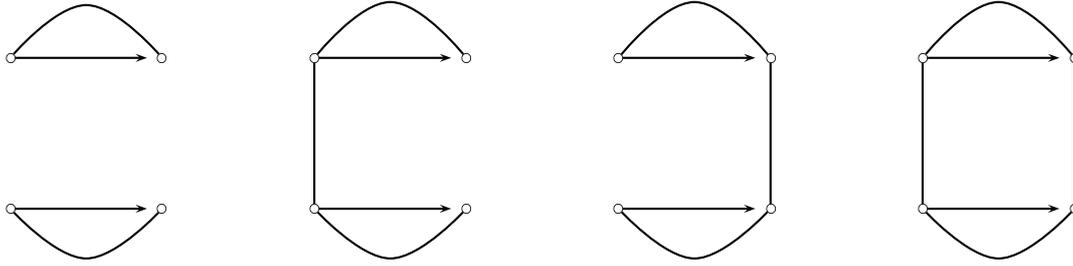
4 Polynôme chromatique mixte et orientations acircuitiques

Nous allons présenter, dans cette section, une interprétation de $|P_m(G_m, -1)|$ en termes d'orientation acircuitique. Les couples d'arcs de l'ensemble $\mathcal{C}(G_m)$, peuvent se séparer en deux configurations.



Nous allons, déjà, étudier les graphes mixtes G_m tels que l'ensemble $\mathcal{C}(G_m)$ ne contienne pas de couples d'arcs relevant de la seconde configuration. De tels graphes mixtes sont exactement les graphes mixtes G_m tels que le graphe mixte $N(G_m)$ associé n'ait pas comme sous-graphe mixte induit par 4 sommets les graphes mixtes

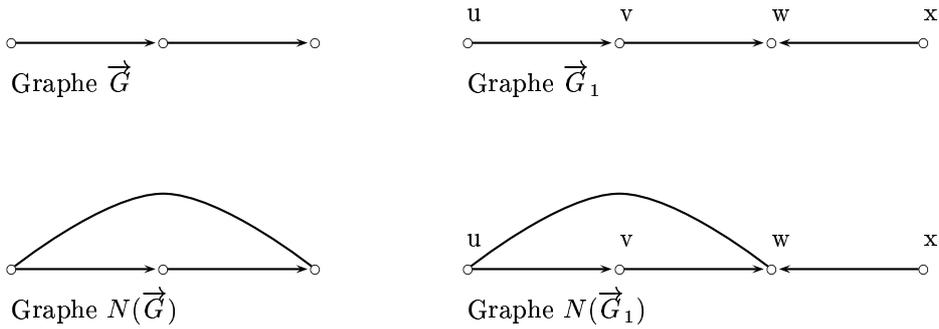
suivants :



Proposition 1 Soit G_m un graphe mixte tel que, si $\{(x, y), (z, t)\} \in \mathcal{C}(G_m)$, alors $y = z$. Alors, $P_m(G_m, k) = (-1)^n |A(Und(N(G_m)))|$, où $A(Und(N(G_m)))$ désigne l'ensemble des orientations acircuitiques de $Und(N(G_m))$. De même, le coefficient c_1 est-il le nombre d'orientations acircuitiques de $Und(N(G_m))$ ayant exactement une source.

Preuve : Soit G_m un tel graphe. Supposons $\{(x, y), (y, z)\} \in \mathcal{C}(G_m)$. Par construction de $N(G_m)$, $\{x, z\} \in E(N(G_m))$, et donc $\{(x, y), (y, z)\} \notin \mathcal{C}(N(G_m))$. Ainsi $\mathcal{C}(N(G_m)) = \{\emptyset\}$. Par la formule d'inclusion / exclusion, nous en déduisons alors $P_m(N(G_m), -1) = P(Und(N(G_m)), -1)$. Le résultat dû à Stanley (cf [11]) implique : $P(Und(N(G_m)), -1) = (-1)^n |A(Und(N(G_m)))|$, où $|A(Und(N(G_m)))|$ désigne donc le nombre d'orientations acircuitiques de $Und(N(G_m))$.

La seconde assertion découle du résultat de Gessel ([4,7,3]). \square



Nous avons :

$$P_m(\vec{G}, k) = k(k-1)(k-2) = P(Und(N(\vec{G})), k)$$

Ainsi, le nombre d'orientations acircuitiques est-il bien 6 (des $2^3 = 8$ orientations possibles de $Und(N(\vec{G}))$, deux conduisent à des circuits). Le graphe \vec{G} a pour polynôme chromatique orienté $k(k-1)(k-2)$, correspondant bien au polynôme chromatique (classique) de $Und(N(\vec{G}))$.

Concernant le graphe \vec{G}_1 , nous avons : $\mathcal{C}(\vec{G}_1) = \{ \{(u, v)(v, w)\}; \{(u, v), (x, w)\} \}$ et donc ce graphe ne vérifie pas la condition précédente. Néanmoins, nous observons que $\mathcal{C}(N(\vec{G}_1)) = \{\emptyset\}$, ce qui vérifie bien l'hypothèse.

$$P_m(\vec{G}_1, k) = k^5 - 4k^4 + 5k^3 - k^2 - k = P(Und(N(\vec{G}_1)), k)$$

Nous vérifions qu'il existe bien 12 orientations acircuitiques différentes de $N(\vec{G}_1)$.

Le précédent résultat implique que si G_m est un graphe mixte N -maximal, alors

$$\{(x, y), (z, t)\} \in \mathcal{C}(G_m) \Rightarrow y \neq z$$

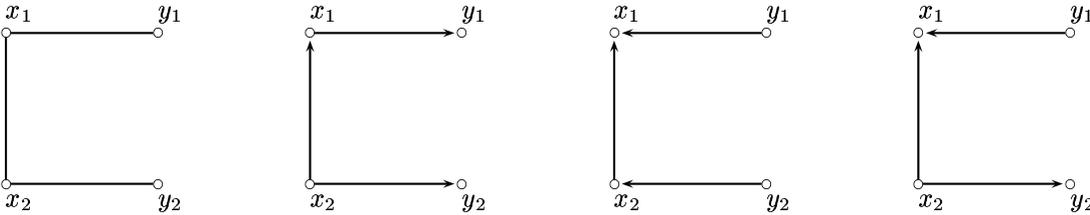
De plus, puisque $P_m(G_m, k) = P_m(N(G_m), k)$, nous supposons dans la suite que l'ensemble $\mathcal{C}(G_m)$ possède uniquement des paires de la seconde configuration.

Passons, à présent, à l'étude de graphes mixtes dont l'ensemble $\mathcal{C}(G_m)$ possède des paires d'arcs relevant de la seconde configuration. Pour ce faire, nous introduisons quelques notions intervenant dans l'interprétation de $P_m(G_m, -1)$.

Définition 1 Orienter dans le même sens.

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe (non-orienté), et soit une paire de couples de sommets de $G \{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ tels que $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\} \in E(G)$. Soit o une orientation de G en $\vec{G} = (V(G), A(\vec{G}))$. Nous dirons que \vec{G} oriente dans le même sens le couple de paires $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ si $(x_1, y_1) \in A(\vec{G}) \iff (x_2, y_2) \in A(\vec{G})$.

Afin d'illustrer cette propriété "d'orienter dans le même sens", nous donnons un graphe, puis deux orientations de celui-ci orientant le couple $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ dans le même sens, et enfin une autre dénué de cette propriété.



Définition 2 Soient $\{(x, y), (z, t)\}$ une paire d'arc de G_m et soit o une orientation de $Und(G_m)$. Nous dirons que les arcs $(x, y), (z, t)$ sont reliés par un chemin dans $o(Und(G_m))$ s'il existe un chemin, dans $o(Und(G_m))$, contenant l'un des deux arcs ($o(\{x, y\})$ ou $o(\{z, t\})$) dont l'une des extrémités est une extrémité de l'autre arête.

Proposition 2 Soit G_m un graphe mixte N -maximal tel que $\mathcal{C}(G_m) = \bigcup_{i=1}^p \{(x_i, y_i); (z_i, t_i)\}$ (un sommet n'apparaissant qu'une seule fois dans $\mathcal{C}(G_m)$). Nous supposons de plus qu'il n'existe pas, dans $Und(G_m)$ de chemins entre les sommets x_i et x_j , ($1 \leq i < j \leq p$). Nous avons alors :

$$P_m(G_m, -1) = (-1)^n |A_s(G_m)|$$

où $A_s(N(G_m))$ désigne l'ensemble des orientations acircuitiques o du graphe $Und(N(G_m))$ soit donnant même sens, soit reliant par un chemin, toutes paires $\{(x_i, y_i); (z_i, t_i)\}_{1 \leq i \leq p}$.

Démonstration : Raisonnons par récurrence forte sur p .

La proposition est vraie pour $p = 0$ par la proposition précédente. Soit p un entier strictement positif. Supposons la proposition vraie pour tout graphe G'_m tel que $|\mathcal{C}(G'_m)| \leq p - 1$, et considérons G_m un graphe mixte tel que $\mathcal{C}(G_m) = \bigcup_{i=1}^p \{(x_i, y_i); (z_i, t_i)\}$.

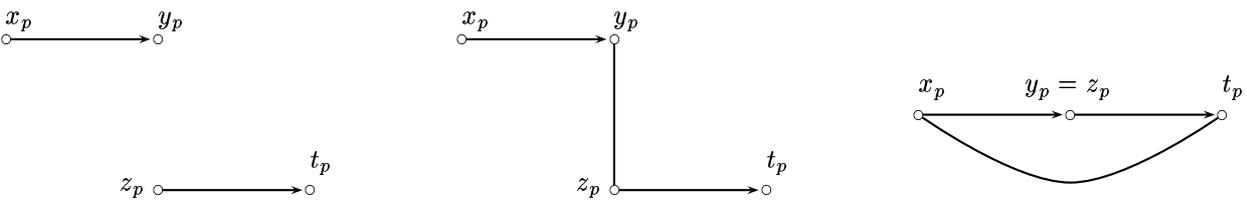
Soit $e = \{y_p, z_p\} \notin E(G_m)$. Les graphes mixtes $G_m \cup e$ et $G_m - e$ vérifient :

$|\mathcal{C}(G_m \cup e)| \leq p - 1$; $|\mathcal{C}(G_m - e)| \leq p - 1$. Ainsi, l'hypothèse de récurrence implique les égalités :

$$P_m(G_m \cup e, -1) = (-1)^n |A_s(G_m \cup e)| \quad P_m(G_m - e, -1) = (-1)^{n-1} |A_s(G_m - e, -1)|$$

Considérons $o \in A_s(G_m \cup e)$, l'une des $|P_m(G_m \cup e, -1)|$ orientations acircuitiques de $G_m \cup e$ donnant même orientation ou reliant par un chemin tous les couples de $\mathcal{C}(G_m \cup e)$.

Nous lui associons, d'une part, l'orientation de $A_s(G_m)$, notée $o \setminus o(e)$, définie en privant l'orientation o de l'orientation de l'arête e et, d'autre part, l'orientation partielle o_e de $N(G_m - e)$ définie par l'identification des sommets y_p et z_p dans l'orientation o . Pour compléter cette dernière en une orientation de $A_s(G_m - e)$, il est nécessaire de donner une orientation à l'arête $\{x_p, t_p\}$, cette arête n'existant pas dans $G_m \cup e$, mais existant dans $N(G_m - e)$ comme le montre le schéma ci-dessous.



Graphe G_m

Graphe $G_m \cup e$

Graphe $N(G_m - e)$

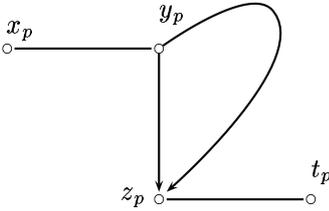
Ainsi, en spécifiant l'orientation de l'arête $\{x_p, t_p\}$, nous obtenons une orientation de $A_s(N(G_m - e))$. Enfin, nous

notons $o' = (o \setminus o(e)) \cup \overline{o(e)}$ l'orientation de $G_m \cup e$ définie, partant de l'orientation o , en inversant l'orientation de l'arc $o(e)$. Notons les égalités en tant, respectivement, qu'orientations de G_m et de $G_m \setminus e$:

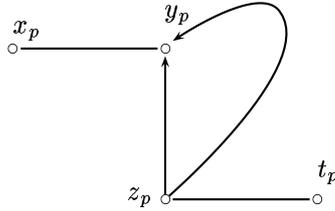
$$o \setminus o(e) = o' \setminus o'(e); \quad o_e = o'_e.$$

- Premier cas : S'il existe, dans l'orientation $o \setminus o(e)$, un chemin entre y_p et z_p .

Alors il existe une unique orientation de e rendant $o(G_m \cup e)$ acircuitique. Nous sommes, alors, dans l'une des configurations suivantes :



Configuration a.



Configuration b.

Dans ce cas, les orientations o' de $G_m \cup e$ et o_e de $G_m \setminus e$ ne sont pas acircuitiques. Ainsi, définissons-nous l'application entre ces orientations de $G_m \cup e$ et des orientations de G_m :

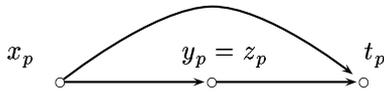
$$\phi_1(o) = o \setminus e \in A_s(G_m \cup e).$$

Nous constatons que nous obtenons une bijection entre l'ensemble des orientations acircuitiques o de $A_s(G_m \cup e)$ ayant un chemin entre y_p et z_p et l'ensemble des orientations acircuitiques de $A_s(G_m)$ possédant un chemin entre y_p et z_p .

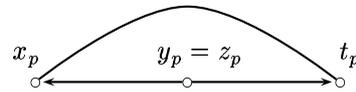
Nous déduisons un résultat similaire s'il existe, dans $o(G_m \cup e)$, un chemin entre x_p et t_p .

Second cas : S'il n'existe pas, dans o , de chemin entre y_p et z_p , ni de chemin entre x_p et t_p .

Alors, l'orientation o' définie par $o' = (o \setminus o(e)) \cup \overline{o(e)}$ est aussi une orientation acircuitique appartenant à $A_s(G_m \cup e)$. Considérons les deux sous-cas suivants :



Premier sous-cas



Second sous-cas

$\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$ sont orientés dans le même sens

$\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$ ne sont pas orientés dans le même sens

Si la paire d'arcs $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$ est orientée dans le même sens par l'orientation o , alors il existe une unique orientation de l'arête $\{x_p, t_p\}$ permettant de compléter l'orientation o_e en une orientation acircuitique de $N(G_m \setminus e)$. Notons $o_e(\{x_p, t_p\})$ celle-ci. Définissons alors l'application ϕ_2 par :

$$\phi_2(o) = o_e \cup o_e(\{x_p, t_p\}) \in A_s(N(G_m \setminus e)).$$

$$\phi_2(o') = o' \setminus o'(e) \in A_s(G_m).$$

L'application ϕ_2 , ainsi définie, est une bijection entre ce sous-ensemble des orientations acircuitiques de $A_s(G_m \cup e)$ et l'union de l'ensemble des orientations acircuitiques de $A_s(N(G_m \setminus e))$ telles que $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$ soient orientées dans le même sens et telles qu'il n'y ait pas de chemin autre entre x et t que l'arc $o(\{x_p, t_p\})$ et le sous-ensemble de $A_s(G_m)$ formé des orientations acircuitiques donnant même sens au couple $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$.

Si la paire d'arcs $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$ n'est pas orientée dans le même sens par l'orientation o , alors, les deux orientations différentes de l'arête $\{x_p, t_p\}$ complètent l'orientation o_e en une orientation acircuitique de $A_s(N(G_m \setminus e))$. Ainsi, faisons-nous correspondre ces orientations de $A_s(G_m \cup e)$ et certaines orientations de $A_s(N(G_m \setminus e))$ de la façon suivante :

$$\phi_3(o) = o_e \cup (x_p, t_p) \in A_s(N(G_m \setminus e)).$$

$$\phi_3(o') = o'_e \cup (t_p, x_p) \in A_s(N(G_m \setminus e)).$$

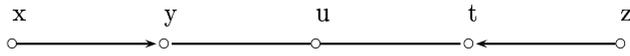
Nous obtenons, alors, une bijection entre ces orientations de $A(G_m \cup e)$ et le sous-ensemble de $A(N(G_m \setminus e))$ constitué des orientations telles que le couple $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$ ne soit pas orienté dans le même sens et telle qu'il n'y ait pas de chemin entre x_p et t_p autre que l'arc $o(\{x_p, t_p\})$.

En regroupant les bijections ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 , nous obtenons finalement une bijection entre l'ensemble $A_s(G_m \cup e)$ et l'union de :

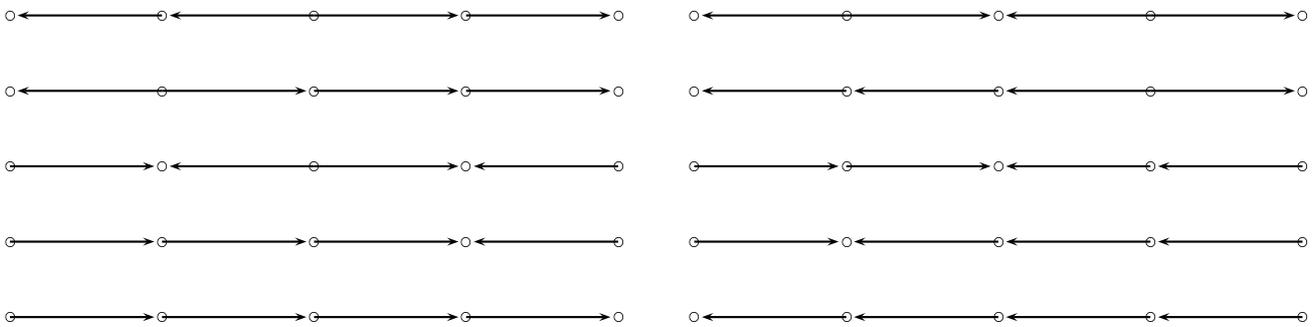
- l'ensemble des orientations acircuitiques de $A_s(G_m)$ donnant même orientation au couple $\{(x_p, y_p), (z_p, t_p)\}$ ou ayant un chemin entre x_p et t_p ou entre y_p et z_p ,
- l'ensemble des orientations acircuitiques de $A_s(N(G_m \cup e))$.

Comme ce dernier ensemble a pour cardinal $|P_m(N(G_m \cup e), -1)|$, nous en déduisons la proposition. \square

Présentons quelques exemples.

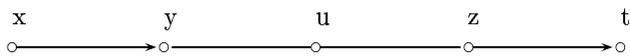


Ce premier graphe G_m est bien N -maximal (i.e. que $N(G_m) = G_m$) et $\mathcal{C}(G_m) = \{(x, y), (z, t)\}$. Le polynôme chromatique mixte de ce graphe est $k^5 - 4k^4 + 5k^3 - k^2 - k$. Ainsi, $P_m(G_m, -1) = -10$; il doit donc y avoir 10 orientations acircuitiques de ce graphe orientant dans le même sens $\{(x, y), (z, t)\}$ ou les reliant par un chemin. Nous les donnons ici :



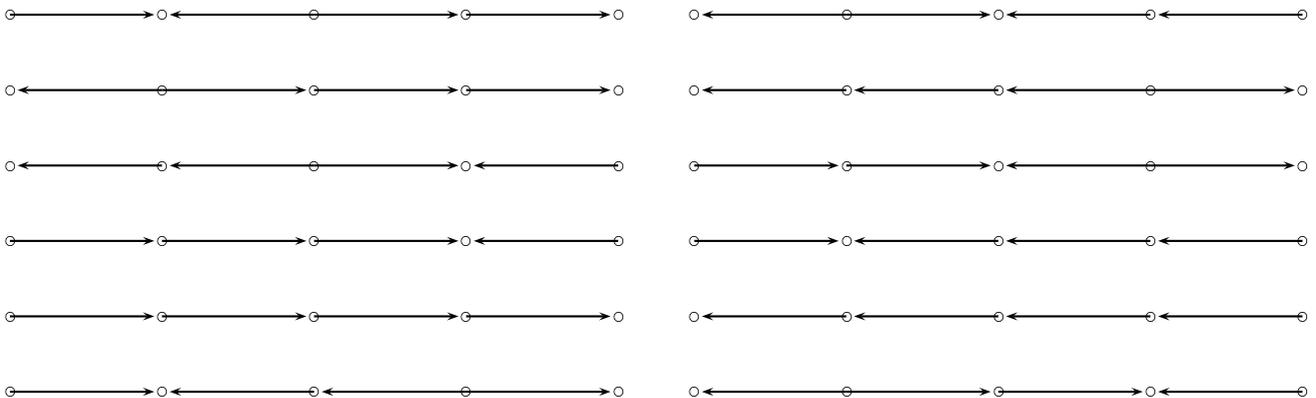
De ces dix orientations, seules les deux dernières (tout en bas), ne respectent pas l'orientation dans le même sens des arcs de $\mathcal{C}(G_1)$; nous avons alors bien deux chemins (utilisant au moins l'un des arcs).

Donnons un autre exemple assez similaire au premier.



Le polynôme chromatique orienté du graphe précédent est :

$P_m(G_m, k) = k^2(k - 1)^2(k - 2)$. Ainsi $P_m(G_m, -1) = -12$. Donnons les 12 orientations acircuitiques telles que...



Sur ces 12 configurations, les seules n'orientant pas le couple $\{(x, y), (z, t)\}$ dans le même sens sont les deuxième et quatrième (en partant du haut).

Nous pouvons généraliser la proposition précédente en remarquant que la démonstration est valable dès que :

$$\mathcal{C}(G_m \cup e) = \mathcal{C}(G_m - e) = \mathcal{C}(G_m) \setminus (x, y), (z, t)$$

Si l'on désigne par e la paire $\{y, z\}$ telle que $\{y, z\} \notin E(\text{Und}(G_m))$.

Nous définissons l'ensemble des graphes mixtes A_s -interprétable de la façon suivante :

Tout graphe G_m tel que $\mathcal{C}(N(G_m)) = \bigcup_{i=1}^p \{(x_i, y_i); (z_i, t_i)\}$ est A_s -interprétable.

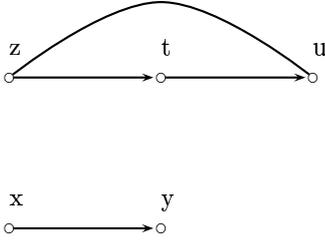
Tout graphe G_m tel qu'il existe $e = \{x, y\} \notin E(\text{Und}(N(G_m)))$ tel que les graphes mixtes $N(G_m \cup e)$ et $N(G_m - e)$ vérifient $\mathcal{C}(G_m \cup e) = \mathcal{C}(G_m - e) = \mathcal{C}(G_m) \setminus (x, y), (z, t)$ et soit A_s -interprétable est A_s -interprétable.

Nous obtenons, alors, le corollaire suivant :

Corollaire 4 *Pour tout graphe mixte G_m A_s -interprétable, nous avons :*

$$P_m(G_m, -1) = (-1)^n |A_s(\text{Und}(G_m))|$$

Donnons un graphe mixte N -maximal ne vérifiant pas la précédente condition :



Le graphe G_m est bien N -maximal, et nous avons : $\mathcal{C}(G_m) = \{(x, y), (z, t), \{(x, y), (t, u)\}\}$.

Nous constatons en effet que $\mathcal{C}(G_m - e) = \{\emptyset\} \neq \mathcal{C}(G_m) \setminus \{(x, y), (z, t)\}$, avec $e = \{y, z\}$.

Le polynôme chromatique mixte de ce graphe est : $P_m(G_m, k) = k(k-1)(k-2)^2(k+1)$. Ainsi, son évaluation en -1 est-elle nulle ($P_m(G_m, -1) = 0$).

Nous allons à présent énoncer un résultat (partiel) permettant de prendre en compte ce genre de graphe mixte.

Proposition 3 *Soit G_m un graphe mixte tel que $\mathcal{C}(G_m) = \{(x, y), (z, t), \{(x, y), (u, v)\}\}$, tel que les sommets z, t, u et v soient dans la même composante connexe et x, y ne soient pas dans celle-ci. Nous obtenons alors :*

$$P_m(G_m, -1) = (-1)^n (|A_s(G_m)| - |B_s(G_m)|)$$

où $B_s(G_m)$ désigne l'ensemble des orientations acircuitiques de G_m telles qu'il existe un chemin contenant les arcs (z, t) et (u, v) et que ceux-ci ne soient pas orientés dans le même sens que l'arc (x, y) .

Preuve : Nous considérons la formule $P_m(G_m, -1) = P_m(G_m \cup e, -1) + P_m(G_m - e, -1)$, avec $e = \{y, z\}$. Nous retrouvons alors deux graphes mixtes $G_m \cup e$ et $G_m - e$ vérifiant la condition de la précédente proposition. Ainsi $P_m(G_m \cup e, -1) = (-1)^n |A_s(G_m \cup e)|$ et $P_m(G_m - e, -1) = (-1)^{n-1} |A_s(G_m - e)|$.

Soit $o \in A_s(G_m \cup e)$.

- Si (x, y) et (u, v) ont même orientation par o . Dans ce cas, l'orientation $o' = (o \setminus o(e)) \cup \overline{o(e)}$ appartient aussi à $A_s(G_m \cup e)$.

Si o n'oriente pas dans le même sens la paire $\{(x, y), (z, t)\}$, alors l'application ψ_1 définie par :

$$\psi_1(o) = o_e \cup (x, t) \in A_s(G_m - e)$$

$$\psi_1(o') = o_e \cup (t, x) \in A_s(G_m - e)$$

est une bijection entre ces orientations de $A_s(G_m \cup e)$ et les orientations de $A_s(G_m - e)$ n'orientant pas $(x, y), (z, t)$ dans le même sens. Si o oriente dans le même sens la paire d'arc $\{(x, y), (z, t)\}$, alors il n'existe qu'une seule orientation possible de l'arête $\{x, t\}$ de $G_m - e$ rendant l'orientation o_e acircuitique. Notons $o_e(\{x, t\})$ celle-ci.

Nous considérons l'application ψ_2 définie par :

$$\psi_2(o) = o_e \cup o_e(\{x, t\}) \in A_s(G_m - e).$$

$$\psi_2(o') = o' \setminus o(e) \in A_s(G_m - e).$$

est une bijection entre ces orientations de $A_s(G_m \cup e)$ et l'union des orientations de $A_s(G_m - e)$ et de $A_s(G_m)$ orientant $\{(x, y), (z, t)\}$ dans le même sens.

- Sinon (x, y) et (u, v) n'ont pas même orientation mais sont reliés par un chemin dans $o(G_m \cup e)$. Comme (x, y) n'appartient pas, dans G_m , à la composante connexe de $(z, t), (u, v)$, nous en déduisons que ce chemin passe

nécessairement par l'arc $o(\{z, y\})$, impliquant que $\{(x, y), (z, t)\}$ ne sont pas orienté dans le même sens dans $o(G_m \cup e)$. De plus, l'orientation $o' = (o \setminus o(e)) \cup \overline{o(e)}$ n'appartient pas à $A_s(G_m \cup e)$. Néanmoins, nous constatons que les deux orientations $o_e \cup (x, t)$ et $o_e \cup (t, x)$ appartiennent à $A_s(G_m - e)$. Définissons l'application ψ_3 sur le sous-ensemble formé des orientations de $A_s(G_m - e)$ n'orientant pas dans le même sens $\{(x, y), (z, t)\}$, par :

$$\psi_3(o_e \cup (x, t)) = o \in A_s(G_m \cup e).$$

$$\psi_3(o_e \cup (t, x)) = (o \setminus o(e)) \in B_s(G_m).$$

La précédente application induit une bijection entre le sous-ensemble de $A_s(G_m - e)$ (formé des orientations n'orientant pas $\{(x, y), (z, t)\}$ dans le même sens, et l'union du sous-ensemble de $A_s(G_m \cup e)$ formé des orientations de $A_s(G_m \cup e)$ n'orientant pas $\{(x, y), (u, v)\}$ dans le même sens et le sous-ensemble $B_s(G_m)$. La proposition s'ensuit de la réunion de ces bijections. \square

Références

1. G.D. Birkhoff. A determinantal formula for the number of ways of coloring a map. *Annals of Mathematics*, 14.
2. G.D. Birkhoff and D.C. Lewis. Chromatics polynomials. *Trans. American Mathematical Society*, 60.
3. David D. Gebhard and Bruce E. Sagan. Sinks in orientations of graphs. *Journal of Combinatorics Theory*, Serie B.
4. Ira M. Gessel. Counting acyclic digraphs by sources and sinks. *Discrete Mathematics*, pages 253–258, 1996.
5. Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley Intersciences Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.
6. A. V. Kostochka, E. Sopena, and X. Zhu. Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs. *Journal of Graph theory*, 24, N. 4 :331–340, 1997.
7. Bodo Lass. Orientations acycliques et le polynômes chromatique. *European Journal of Combinatorics*, 22 :1101–1123, 2001.
8. Alexander V. Kostochka, André Raspaud, Oleg V. Borodin, Dimitri Fon-der-Flaass and Eric Sopena. On deeply critical oriented graphs. *Journal of Combinatorics Theory Serie B*, 81 :150–155, 2001.
9. Eric Sopena. Computing chromatic polynomials of oriented graphs. *Proc. Formal Power Series and Algebraic Combinatorics FPSAC'94*, pages 413–422, 1994.
10. Eric Sopena. Oriented graph coloring. *Discrete Mathematics*, 229 :359–369, 2001.
11. R.P. Stanley. Acyclic orientations of graphs. *Discrete Mathematics*, 5 :171–178, 1973.
12. Bjarne Toft. Colouring, stable sets and perfect graphs. In R. Graham, M. Grottschel, and L. Lovasz, editors, *Handbook of Combinatorics*, pages 233–288. Elsevier Science, 1995.