
Décomposition d'un tournoi en classes acycliques.

Jean-Francois Culus et Bertrand Jouve

Équipe GRIMM

Université Toulouse Le Mirail

UFR SES, Département de Math-Info

31058 Toulouse Cedex

culus@univ-tlse2.fr et jouve@univ-tlse2.fr

RÉSUMÉ. *La coloration d'un graphe est un problème bien connu, recherchant à regrouper des individus dans des classes "stables" (sans arêtes dans une classe). Mais le caractère symétrique du graphe ne nous permet pas de modéliser un certain nombre d'interactions qui sont naturellement antisymétrique. En particulier, nous pouvons souhaiter regrouper les individus dans des ensembles ordonnés tels que tous les individus d'une même classe aient mêmes interactions avec les individus hors cette classe. Nous étudions dans ce travail une notion de décomposition d'un graphe orienté permettant de regrouper les individus dans des classes prenant en compte ces demandes. Nous présentons ici des aspects algorithmiques et de complexité combinatoire de ce problème.*

MOTS-CLÉS : *décomposition d'un tournoi, ordre, coloration, complexité.*

1. Introduction

Lorsque l'on cherche à généraliser la notion classique de coloration d'un graphe non-orienté à des graphes orientés, nous trouvons dans la littérature deux approches différentes : l'une, due à [SOP 01], consiste à considérer la décomposition d'un graphe orienté G en classes stables (sans arcs entre les sommets d'une même classe) mais en imposant l'unidirection entre les différentes classes monochromatiques (tous les arcs entre deux classes monochromatiques doivent avoir la même direction). L'autre, due à [NEU 82] ou (indépendamment) à [BOK 03], consiste à trouver la plus petite partition (en nombre de classes) des sommets du graphe orienté G en classes acycliques, sans conditions sur les arcs entre les classes monochromatiques.

Nous proposons alors l'introduction de la notion de k -décomposition d'un graphe orienté G comme étant la partition de l'ensemble des sommets G en k classes telle que : (1)- les classes monochromatiques soient acycliques et (2)- les classes monochromatiques sont en unidirections les unes par rapport aux autres (ie : tous les arcs entre deux classes de colorations sont dans le même sens).

La k -décomposition d'un graphe orienté G proposée ici est donc une décomposition médiane entre les deux généralisations précédemment citées.

2. Exemple

Un zoo fictif dispose de n primates à répartir de telle manière à reconstituer des clans. Par l'observation du comportement des primates, il est aisé de connaître, étant donné deux individus A et B , leur relation hiérarchique : soit A domine B , soit B domine A soit A et B sont indifférents l'un à l'autre. Une première nécessité consiste à former des clans hiérarchisés (indépendamment les uns des autres) : il est donc nécessaire que le graphe des relations entre les individus d'un même clan soit acyclique. Mais, lors de la mise en présence des différents clans dans un même espace, une seconde condition pour s'assurer de la stabilité des clans est que les différents membres d'un même clan aient une attitude similaire face aux individus d'un autre clan. Ainsi, par exemple, tout individu du

clan C_1 devra dominer ou être indifférent aux individus du clan C_2 si l'un des membres de C_1 domine l'un des membres de C_2 .

Rechercher à trouver la répartition des primates optimale afin d'obtenir le plus petit nombre de clans possible revient à trouver le plus petit entier k tel qu'il existe une k -décomposition du graphe des relations entre les différents primates.

3. Complexité

Soit k un entier. Nous pouvons montrer qu'il existe une réduction de Turing du problème de k -décomposition au problème de k' -coloration orienté dû à [SOP 01]. De plus, il existe une réduction (similaire à la première) de ce problème au problème classique de k'' -coloration d'un graphe non orienté. Ce dernier étant NP-complet, la NP-complétude des deux premiers s'ensuit.

4. Le cas des tournoi

Remarquons déjà que pour T tournoi, les classes monochromatiques obtenues par une k -décomposition sont des ordres.

Soit x un sommet de T . Nous appelons (s'il existe) *plus grand successeur de x* le sommet x^+ de T défini par : $\Gamma^+(x^+) = \Gamma^+(x) \setminus \{x\}$, où $\Gamma^+(x)$ désigne l'ensemble des successeurs du sommet x . Notons que, dans le cas des tournois, le plus grand successeur de x est nécessairement unique s'il existe.

Nous montrons que si x^+ n'existe pas, alors le sommet x est nécessairement le plus petit sommet dans l'ordre induit par sa classe monochromatique.

De plus, nous pouvons montrer que, si le sommet x^+ existe, nous pouvons le supposer être dans la même classe monochromatique que x sans augmenter le nombre de couleurs k de la solution.

Cela nous conduit à démontrer qu'il y a unicité de la k -décomposition minimale étant donné un tournoi T .

Il existe des propriétés symétriques pour le plus petit prédécesseur x^- de x , défini par : $\Gamma^-(x^-) = \Gamma^-(x) \setminus \{x^-\}$. Ces considérations nous amène à introduire l'algorithme suivant :

Entrée Un tournoi T .

Sortie L'entier k minimum tel qu'il existe une k -décomposition de T ainsi que cette k -décomposition, donnée par les marques $\{M(x), x \in V(T)\}$.

Initialisation : Pour tout sommet $x \in T$, $M(x) = 0$.

Soit k un entier, initialement nul.

Tant qu'il existe un sommet x de marque $M(x) = 0$, faire :

$k \leftarrow k + 1$

$v \leftarrow x$.

$M(v) \leftarrow k$.

Tant que v^+ existe faire :

$v \leftarrow v^+$

$M(v) = k$.

Tant que v^- existe :

$v \leftarrow v^-$

$M(v) = k$.

Ainsi obtenons-nous un algorithme polynomial permettant de donner la k -décomposition minimale d'un tournoi T . La famille des tournois est donc une classe polynomiale pour ce problème.

5. Tournois indécomposables.

Par un argument probabiliste, nous pouvons démontrer que la probabilité qu'un tournoi aléatoire ayant n sommets soit indécomposable tends vers 1 quand n tend vers $+\infty$. A titre d'exemple, les tournois réguliers sont indécomposables (car quelque soit le sommet $x \in T$, les sommets x^+ et x^- ne peuvent exister).

C'est pourquoi nous nous intéressons plus spécifiquement à ces tournois. En nous inspirant de [NEU 84], nous définissons parmi ceux-ci les tournois sommets-critiques indécomposables (SCI) comme étant les tournois T indécomposables tels que pour tout sommet x de T , le sous-tournoi $T \setminus \{x\}$ soit k' -décomposable, avec $k' \leq |V(T)| - 2$.

Si T est SCI, alors pour u sommet de T , le sous-tournoi $T \setminus \{u\}$ est par définition décomposable, donc il existe deux sommets $\{i_u, j_u\}$ de $T \setminus \{u\}$ ayant mêmes successeurs et mêmes prédécesseurs dans $T \setminus \{u\}$.

A ce tournoi T SCI, nous associons alors le graphe non orienté G définit par :

- Les sommets de G sont les sommets de T .
- Les arêtes de G sont les $\{i_u, j_u\}_{u \in V(T)}$.

Rappelons la définition d'un tournoi circulant : $C_{2j+1}(1, 2, 3, \dots, j)$ est le $(2j + 1)$ -tournoi dont l'ensemble des sommets est $\{1, 2, 3, \dots, 2j + 1\}$ et dont l'ensemble des arcs est $\{uv; 0 \leq v - u \leq j \mod[2j + 1]\}$.

Nous proposons la caractérisation des tournois SCI suivante :

T est SCI si et seulement si le graphe G associé à T est union de tournois circulants.

6. Bibliographie

- [BOK 03] BOKAL D., FIJAVZ G., JUVAN M., KAYLL P. M., MOHAR B., The circular chromatic number of a digraph, *Journal of Graph Theory*, , 2003.
- [NEU 82] NEUMANN-LARA V., The dichromatic Number of a digraph, *Journal of combinatorial Theory, Series B*, vol. 33, 1982, p. 265-270.
- [NEU 84] NEUMANN-LARA V., Vertex critical r -dichromatic tournaments, *Discrete Mathematics*, vol. 498, 1984, p. 83-87.
- [SOP 01] SOPENA E., Oriented graph coloring, *Discrete Mathematics*, vol. 229, 2001, p. 359-369.