

EC 121 CC1: Analyse de base
Durée 2h

Méthode de Héron (d'après Déclic TS, page 47)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
(b) Etudier le sens de variation de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.
(c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{2}$.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser la valeur de sa limite ℓ .
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , nous avons:

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} (u_n - \sqrt{2})^2 \leq \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2})^2$$

- (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} (u_0 - \sqrt{2})$$

- (c) Ecrire un algorithme prenant en entrée $\epsilon > 0$ et donnant en sortie une approximation de la limite ℓ de la suite (u_n) à ϵ près.

Théorème de cours (d'après Math'X, exo 91 p.129)

Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ .

1. Justifier qu'il existe un entier naturel $p \geq 1$ tel que pour tout $n \geq p$,

$$\ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$$

2. Montrer que la suite (u_n) est bornée en proposant un minorant et un majorant à cette suite.