

EC 121 CC2: Analyse de base

Durée 2h

Indépendance dans l'urne (exo 60 p. 389, Math'X TS)

1. Là ici on fait un joli arbre avec des feuilles et des petits poids partout ...
2. (a) L'univers Ω est constitué des couples $\{(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)\}$ représentant les couleurs des deux boules successivement tirées. La probabilité P sur cet univers est déterminée par l'arbre de probabilité précédent. Ainsi, nous trouvons que $P(B, B) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$, $P(B, N) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$, $P(N, B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{n+4}$ et $P(N, N) = \frac{1}{4} \times \frac{n+1}{n+4}$. On vérifie alors bien que la somme des probabilités des événements élémentaires est égal à 1: ie.

$$\frac{12}{20} + \frac{3}{20} + \frac{3}{4(n+4)} + \frac{n+1}{4(n+4)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

D'après l'arbre de probabilités de la question précédente, nous avons que $P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{5}$.

L'événement $B_1 \cap B_2$ correspond à l'événement élémentaire $B_1 \cap B_2 = \{(B, B)\}$ de Ω . Sa probabilité est égale à $P(B, B) = \frac{3}{5}$.

- (b) Remarquons que les événements $\{B_1, \overline{B_1}\}$ forment un système complet d'événement. Aussi il s'ensuit, d'après la formule des probabilités totales, que

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{n+4} = \frac{3}{5} + \frac{3}{4(n+4)} = \frac{12n+63}{20(n+4)} \end{aligned}$$

- (c) Formellement, l'événement B_1 est la partie $\{(B, B), (B, N)\}$ de notre univers. Nous cherchons s'il existe une valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour laquelle $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ c'est-à-dire telle que $\frac{3}{5} = \frac{12n+63}{20(n+4)} \times \frac{3}{4}$. Cette équation est équivalente à $20n+5=0$ qui n'a pas de solution entière ($n \in \mathbb{N}$).
3. (a) D est l'événement *les deux boules sont de couleurs différentes*. Ainsi, si B_1 est réalisé, alors D est réalisé lorsque l'on tire une boule noire au second tirage, avec la probabilité $\frac{1}{5}$. Ainsi, $P_{B_1}(D) = P_{B_1}(N_2) = \frac{4}{5}$.
- (b) Comme $\{B_1, \overline{B_1}\}$ forme un système complet d'événement, nous avons d'après la formule des probabilités totales que

$$P(D) = P_{B_1}(D) \times P(B_1) + P_{\overline{B_1}}(D) \times P(\overline{B_1}) = \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{n+4} = \frac{3n+27}{20(n+4)}$$

- (c) On cherche donc s'il existe une valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que $P(B_1 \cap D) = P(B_1) \times P(D)$. On remarque que $B_1 \cap D = \{(B, N)\}$ d'où $P(B_1 \cap D) = \frac{3}{20}$. Aussi, nous devons résoudre l'équation

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{4} \times \frac{3n+27}{20(n+4)}$$

Après simplification, nous obtenons que nous devons avoir $5n = 55$ soit $n = 11$. Ainsi, en ajoutant $n = 56$ boules noires supplémentaires lorsque l'on tire une boule noire au premier tirage, les événements B_1 et D sont indépendants.

Etude d'une suite, (d'après Math'X p. 213 exo 64, édition 2006)

1. Nous avons $v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \dots + n)$. Nous reconnaissons alors la somme de n premier entier, qui est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$ d'où $v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$. Il s'ensuit alors classiquement que (v_n) est convergente vers $\frac{1}{2}$.

$P_{B_1}(B_2)$ représente la probabilité de l'événement B_2 sachant B_1 et donc, d'après la formule de Bayles, nous avons $P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)}$.
On peut la lire directement sur l'arbre pondéré.

1. Ici ne pas se précipiter sur l'étude du sens de variation de (v_n) en vue d'utiliser le théorème des suites monotones ... Il faut un peu regarder la suite et reconnaître la somme des premiers entiers; l'expression se simplifie alors grandement!

2. (a) Pour tout réel t , nous avons l'encadrement $-1 \leq \cos(t) \leq 1$. Les fonctions considérées dans cet encadrement étant toutes continues, elles sont intégrables, d'où par croissance de l'intégrale nous avons $\int_0^x -1 dt \leq \int_0^x \cos(t) dt \leq \int_0^x 1 dt$ d'où $-x \leq [\sin(t)]_0^x \leq x$ d'où finalement nous obtenons $-x \leq \sin(x) \leq x$.
- (b) Intégrons de nouveau le précédent encadrement pour $x \in [0, X]$: nous avons alors par croissance de l'intégrale

$$\int_0^X -x dx \leq \int_0^X \sin(x) dx \leq \int_0^X x dx$$

$$\frac{-X^2}{2} \leq 1 - \cos(X) \leq \frac{X^2}{2}$$

Une troisième intégration du précédent encadrement sur l'intervalle $[0, x]$ avec $x \in \mathbb{R}_+$ conduit à

$$-\frac{x^3}{6} \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}$$

- (c) Du précédent encadrement et de celui de la question **2.a**, nous déduisons que

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

3. (a) Démontrons cette inégalité par récurrence sur l'entier naturel n .
- **Initialisation:** $n = 1$ Nous avons $1^3 \leq 1^4$ d'où l'inégalité est vraie au rang $n = 1$.
 - **Hérédité:** Supposons la majoration proposée vraie au rang n et démontrons-là au rang $n + 1$. Par hypothèse de récurrence, nous avons

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{\leq n^4 + (n+1)^3} + (n+1)^3 \leq n^4 + (n+1)^3$$

$$\leq n^4 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$\leq (n+1)^4$$

On utilise ici la formule du binôme de Newton ainsi que le calcul des coefficients binomiaux via le triangle de Pascal

Ainsi, l'inégalité est bien vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion:** Nous avons donc $\forall n \geq 1, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$.

- (b) Par **2.c** nous avons que pour tout réel $x \geq 0, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$. Ainsi, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, nous avons $\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6} \leq \sin \frac{k}{n^2} \leq \frac{k}{n^2}$. En sommant les précédents encadrements pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, nous obtenons alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \leq \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

Or, d'après la question précédente, $\sum_{k=1}^n k^3 \leq n^4$ d'où nous tirons l'inégalité

$$v_n - \frac{n^4}{6n^6} \leq u_n \leq v_n$$

- (c) Par la question **1.** nous savons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$. Comme de manière évidente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{6n^2} = 0$, nous déduisons par le théorème des gendarmes que (u_n) est convergente et de limite égale à $\frac{1}{2}$.

EC 131 CC2: Analyse avancée

1. Nous avons, pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| = |x_{n+2} - x_{n+1}| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n| = \lambda |u_n|$.
En itérant cette relation, nous obtenons que $|u_n| \leq \lambda^n |u_0| = \lambda^n |x_1 - x_0| = \lambda^n |f(a) - a|$.
2. Puisque $\lambda \in]0, 1[$, nous avons d'après le critère des séries géométriques que la série de terme général $\lambda^n |f(a) - a|$ est convergente. Ainsi il s'ensuit que $\sum u_n$ est une série absolument convergente (car $\sum |u_n|$ est majorée par la série $|f(a) - a| \sum \lambda^n$ qui est convergente).
3. La série $\sum u_n$ étant convergente, la suite de ses sommes partielles $(\sum_{k=0}^n u_k)_n$ est donc convergente. Or,

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_0$$

On en déduit ainsi que la suite (x_k) est convergente. Soit ℓ sa limite.

4. Remarquons déjà que la fonction f est uniformément continue, donc continue. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\eta = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ tel que si $|x - y| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y| \leq \lambda \eta \leq \varepsilon$. Ainsi, f contractante implique uniformément continue et donc continue. Aussi, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en ℓ . Par passage à la limite dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ (quand $n \rightarrow +\infty$), nous obtenons que $f(\ell) = \ell$. Ainsi, ℓ est-il un point fixe de f .
5. Soit donc ℓ' un point fixe de f . Nous avons donc $|f(\ell) - f(\ell')| = |\ell - \ell'|$. Or, comme f est strictement contractante, nous avons $|f(\ell) - f(\ell')| \leq \lambda |\ell - \ell'|$ d'où nous obtenons que $|\ell - \ell'| \leq \lambda |\ell - \ell'|$. Ainsi, comme $0 < \lambda < 1$, nous en déduisons que si $\ell = \ell'$.

1. Formellement, cela nécessite une démonstration par récurrence

On peut aussi considérer la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^n u_k$, la majorer par $\sum_{k=0}^n \lambda^n = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$, où encore montrer que c'est une suite de Cauchy etc ...

4. Si ℓ' est un point fixe différent de ℓ , alors $|\ell - \ell'| \neq 0$ et de $|\ell - \ell'| \leq \lambda |\ell - \ell'|$, on déduit que $\lambda \geq 1$ ce qui est absurde

B. Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables et nous avons $g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$. On obtient donc la majoration $|g'(t)| \leq 1$ pour tout réel t .
Il s'ensuit, par l'inégalité des accroissements finis, que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|g(x) - g(y)| \leq 1 \times |x - y|$.
2. La fonction $|g'|$ étant continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$, nous savons que g' est bornée et atteint sa borne sup sur $[a, b]$. Aussi, il existe $m_{x,y}$ tel que $\sup_{t \in [x,y]} |g'(t)| = m_{x,y}$. Comme cette borne est atteinte sur $[x, y]$, nous en déduisons que $m_{x,y} \leq 1$.

• Première rédaction: via intégration des inégalités

L'inégalité $|g'(t)| \leq m_{x,y}$ étant vraie pour tout $t \in [x, y]$ et que les fonctions considérées sont continues sur l'intervalle $[x, y]$, il s'ensuit par croissance de l'intégrale que $\int_x^y |g'(t)| dt \leq \int_x^y m_{x,y} dt$.

Or, par inégalité triangulaire, nous avons que $|\int_x^y g'(t) dt| \leq \int_x^y |g'(t)| dt$ d'où nous obtenons que $|\int_x^y g'(t) dt| \leq m_{x,y} (y - x)$.

Enfin, comme g est une primitive de g' , nous obtenons que $\int_x^y g'(t) dt = g(y) - g(x)$, d'où $|g(y) - g(x)| \leq m_{x,y} |y - x|$. Finalement, l'inégalité $m_{x,y} < 1$ conduit à l'inégalité souhaitée.

• **Seconde rédaction: via I.A.F.** En appliquant l'inégalité des accroissements finis à g sur $[x, y]$, nous obtenons que $|g(x) - g(y)| \leq m_{x,y} |x - y|$ et comme $m_{x,y} < 1$ on en déduit que $|g(x) - g(y)| < |x - y|$.

3. Supposons que la fonction g admette ℓ pour point fixe. Alors $g(\ell) = \ell$ et donc $\arctan(\ell) = \frac{\pi}{2}$, ce qui est absurde. Aussi, g n'admet aucun point fixe.
Montrons enfin que la fonction g n'est pas strictement contractante (mais seulement contractante). Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$. La précédente inégalité implique que $\frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \leq \lambda$, ce qui entraîne que $|g'(x)| \leq \lambda$ pour tout réel x . Or, comme $g'(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$, on a que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) = 1$ et donc la précédente majoration est fautive. Il s'ensuit donc que g n'est pas absolument contractante.

1.a Notez que l'on peut obtenir cet encadrement en intégrant $g'(t)$ entre x et y aussi...

2. La 1ere inégalité vient du fait que toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Pour la seconde, il faut penser à intégrer et à bien gérer les valeurs absolues. Il faut ici y aller doucement sans sauter d'étapes et penser à l'inégalité triangulaire...

1.c Si g était strictement contractante, alors d'après le théorème démontré en partie A, elle admettrait un point fixe ... ce qui n'est pas. Ainsi, g n'est pas strictement contractante. Ici on démontre cela via un raisonnement par l'absurde pour manipuler les inégalités.