

EC 142 CC2: Probabilités

Indépendance dans l'urne (exo 60 p. 389, Math'X TS)

Une urne contient au départ 3 boules blanches et 1 boule noire, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne.

- Si elle est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire.
- Si elle est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires, où $n \in \mathbb{N}^*$.

On tire ensuite au hasard une seconde boule dans l'urne. On note :

- B_1 l'événement *on obtient une boule blanche au premier tirage*
 - B_2 l'événement *on obtient une boule blanche au second tirage*
1. Illustrer la situation par un arbre pondéré.
 2. (a) Déterminer les probabilités $P_{B_1}(B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$.
 (b) Montrer que $P(B_2) = \frac{12n+63}{20(n+4)}$.
 (c) Existe-t'il une valeur de n pour laquelle les événements B_1 et B_2 sont indépendants ?
 3. On désigne par D l'événement *les deux boules sont de couleurs différentes*.
 (a) Calculer $P_{B_1}(D)$.
 (b) Montrer que $P(D) = \frac{3n+27}{20(n+4)}$.
 (c) Existe-t'il une valeur de n pour laquelle les événements B_1 et D sont indépendants ?

EC 121 CC2: Analyse de base

Durée 2h

Etude d'une suite, (d'après Math'X p. 213 exo 64, édition 2006)

On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}; \quad v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.
2. (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, nous avons $-x \leq \int_0^x \cos(t)dt \leq x$.
 En déduire que $-x \leq \sin(x) \leq x$.
 (b) Déduire de **2a** que, pour tout réel x positif ou nul

$$-\frac{x^2}{2} \leq 1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\text{puis que } -\frac{x^3}{6} \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}.$$

- (c) Justifier alors que pour tout réel x positif ou nul $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
3. (a) Prouver que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \leq n^4$.
 (b) Déduire du **2.** l'inégalité pour tout entier naturel n non nul:

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n$$

- (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Quelle est sa limite ?

EC 131 CC2: Analyse avancée

A. Démonstration du théorème

On dit que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une contraction stricte s'il existe un réel $\lambda \in]0, 1[$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Ainsi que la suite (u_n) par $u_n = x_{n+1} - x_n$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $|u_{n+1}| \leq \lambda |u_n|$, puis que $|u_n| \leq \lambda^n |f(a) - a|$.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ de terme général u_n est convergente.
3. Montrer que la suite (x_n) est convergente. On notera ℓ sa limite.
4. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$. En déduire que ℓ est un point fixe de f , c'est-à-dire qu'il vérifie $f(\ell) = \ell$.
5. Soit ℓ' un point fixe de f . Démontrer que nécessairement $\ell' = \ell$.

B. Sur la nécessité d'avoir une contraction stricte

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = t + \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$.

1. Démontrer que pour tout réel t , $|g'(t)| < 1$.
 En déduire que pour tout réels (x, y) , nous avons $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$.
2. Justifier que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, avec $x < y$, il existe $m_{x,y} \in]0, 1[$ tel que, $\sup_{t \in [x,y]} |g'(t)| \leq m_{x,y}$.
 En déduire alors que si $x \neq y$, $|g(x) - g(y)| < |x - y|$.
3. La fonction g admet-elle un point fixe ? Démontrer que g n'est pas contraction stricte.