

CC1 Analyse avancée
d'après Capes Agricole 2013
Partie I: Préliminaires

1. La suite (a_n) étant strictement croissante, nous en déduisons que la suite $(-a_n)$ est strictement décroissante. Comme la somme de deux suites décroissantes est décroissante, nous en déduisons que la suite $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Nous savons que la suite $(b_n - a_n)$ est strictement décroissante et de limite nulle. Aussi, raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un rang n_0 pour lequel $b_{n_0} - a_{n_0} < 0$. Alors, par décroissance de la suite $(b_n - a_n)$, nous en déduisons que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, nous avons $b_n - a_n \leq b_{n_0} - a_{n_0}$. Aussi, en passant à la limite dans cette dernière inégalité, nous obtenons (théorème de prolongement des inégalités) que $0 \leq b_{n_0} - a_{n_0}$. Or, $b_{n_0} - a_{n_0} < 0$ ce qui est absurde (car nous avons $0 < 0$). Aussi, nous en déduisons que, pour tout rang n , $b_n - a_n \geq 0$.
3. De la question précédente, nous déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$. La suite (b_n) étant strictement décroissante, elle est majorée par son premier terme: aussi, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n < b_0$. Ainsi, de la question précédente, nous déduisons que (a_n) est une suite croissante et majorée par b_n ($\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n < b_0$). Ainsi, d'après le théorème des suites monotones, la suite (a_n) est convergente. On désigne par ℓ_a sa limite.
On démontre de même que la suite (b_n) est une suite décroissante et minorée par a_0 , d'où elle est convergente. On désigne par ℓ_b sa limite.
Enfin, puisque la suite $(b_n - a_n)$ est de limite nulle, nous en déduisons par passage à la limite via le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes que $\ell_b - \ell_a = 0$ d'où $\ell_a = \ell_b$. Ainsi, les deux suites ont bien même limite: soit ℓ celle-ci.
4. Nous savons que (a_n) est une suite croissante et de limite ℓ . Montrons en raisonnant par l'absurde que $\forall n$, $a_n < \ell$.
Pour ce faire, supposons l'existence d'un rang n_0 pour lequel $a_{n_0} \geq \ell$. Par stricte croissance de la suite (a_n) , nous avons $a_{n_0+1} > \ell$.
Par stricte croissance de la suite (a_n) , nous déduisons que $\forall n \geq n_0 + 1$, $a_n > a_{n_0+1}$. En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, nous obtenons par le théorème de prolongement des inégalités que $\ell \geq a_{n_0+1}$. On déduit alors une contradiction car $a_{n_0+1} > \ell$ d'où $\ell > \ell$. Ainsi, la suite (a_n) vérifie, pour tout entier naturel n , $a_n < \ell$.
On démontre de la même manière l'autre inégalité. • **Remarque:** Il y avait deux possibilités: soit on démontre l'inégalité stricte directement, et pour ce faire on a besoin d'une inégalité stricte entre le $a_{n_0+1} > \ell$. C'est pourquoi on est obligé de décaler d'un rang ($n_0 + 1$ au lieu de n_0) puisque l'hypothèse d'absurde donne une inégalité large.
Soit on pouvait établir déjà les inégalités larges, ie. $a_n \geq \ell \leq b_n$ et ensuite dire que ces inégalités étaient nécessairement strictes par stricte monotonies des suites (a_n) et (b_n) .

Partie II

1. La suite (a_n) est clairement strictement croissante $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n!} > 0$.
Calculons $b_{n+1} - b_n$.

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\
 &= \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!} (n(n+1) + n - (n+1)^2) \\
 &= \frac{-1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!}
 \end{aligned}$$

Aussi, la suite (b_n) est strictement décroissante.

Enfin, $b_n - a_n = \frac{1}{n \cdot n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Il s'ensuit que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Remarque: Il faut respecter la définition de la partie I et donc démontrer les strictes monotonies des suites (a_n) et (b_n) , afin de pouvoir ensuite les inégalités strictes $a_n < \ell < b_n$.

2. (a) $n! \cdot a_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$. On remarque alors que, pour $0 \leq k \leq n$, $\frac{n!}{k!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (k+1)$ est un entier naturel comme produit d'entiers naturels. Ainsi, en sommant ces quantités, nous en déduisons que $n! \cdot a_n$ est un entier naturel.
- (b) D'après la question **I.4** appliquée au rang q , nous avons que

$$a_q < \frac{p}{q} < b_q = a_q + \frac{1}{q \cdot q!}$$

En multipliant par l'entier naturel $q \cdot q!$, nous obtenons

$$q \cdot q! \cdot a_q < p \cdot q! < q \cdot q! \cdot a_q + 1$$

Enfin, en retranchant $q \cdot q! \cdot a_q$ nous avons

$$0 < p \cdot q! - q \cdot q! \cdot a_q < 1$$

- (c) Nous en déduisons que $p \cdot q! - q \cdot q! \cdot a_q$ est un entier naturel strictement compris entre 0 et 1 ... ce qui est absurde. Ainsi, on démontre par absurde que la limite ℓ commune de ces deux suites est un irrationnel.

Partie III

1. (a) *Il y a essentiellement deux méthodes: soit introduire une fonction auxiliaire et en étudier la suite, soit utiliser la convexité de la fonction exponentielle.*
La fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$, nous en déduit qu'elle est au dessus de ses tangentes. Or, sa tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ (avec $f(x) = e^x$) d'où $y = x + 1$. Ainsi, nous obtenons l'inégalité, pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$.
- (b) L'inégalité précédente pour $x = \frac{1}{n}$ donne $e^{1/n} \geq 1 + \frac{1}{n} > 0$. En élevant à la puissance n , puisque $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ nous en déduisons que $e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
2. (a) Considérons la fonction auxiliaire $f(x) = (1-x)e^x - 1$. Alors f est dérivable comme produit de fonctions de références dérivables et nous avons $f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$. On en déduit alors que f' est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$ d'où la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $[0, 1[$. Elle admet donc un maximum en 0 et on a $f(0) = 0$ d'où nous en déduisons que $\forall x \in]-\infty, 1[$, $(1-x)e^x \leq 1$. En divisant par $1-x > 0$, nous en déduisons que $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ pour tout $x < 1$.
- (b) En prenant $x = \frac{1}{n} < 1$ dans la précédente inégalité, nous obtenons que $e^{\frac{1}{n+1}} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}$ d'où $e^{1/(n+1)} \leq 1 + \frac{1}{n}$. En élevant à la puissance $n+1$ (la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$), nous en déduisons l'inégalité souhaitée.
3. (a) En factorisant par $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, nous avons

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Nous pouvons déjà remarquer que comme $1 + \frac{1}{n} \geq 1$, nous avons $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et donc l'expression précédente est positive. Par ailleurs, d'après la question précédente, nous avons que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ d'où nous déduisons que

$$0 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{e}{n}$$

Ainsi, par le théorème des gendarmes, nous en déduisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$.

- (b) Par les questions **III.1b** et **III.2b**, nous savons que pour tout entier naturel n ,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

La question précédente montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0$ donc les suites $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ convergent vers la même limite.

Remarque: La dernière qu'est n'est pas si simple: il ne s'agit pas du théorème des suites adjacentes car on n'a pas démontré la croissance / décroissance des suites. Simplement à partir de l'encadrement de e et de la limite de la différence, on peut conclure. Pour s'en convaincre, revenir à la définition de la convergence avec ε