

CC1 Analyse avancée d'après Capes Agricole 2013

Partie I: Préliminaires

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$.

On dit alors que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

1. Montrer que la suite $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $b_n - a_n \geq 0$.
3. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite notée ℓ .
4. Montrer que pour tout entier naturel n , $a_n < \ell < b_n$.

Partie II

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies, pour tout entier naturel n non nul par:

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. L'objectif de cette question est de montrer que la limite commune de ces deux suites, notée ℓ , est un nombre irrationnel. On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\ell = \frac{p}{q}$.
 - (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n n!$ est un entier.
 - (b) Montrer que $0 < p \cdot q! - a_q \cdot q \cdot q! < 1$.
 - (c) En déduire que ℓ est un nombre irrationnel.

Partie III

1. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x , $e^x \geq 1 + x$.
 (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x strictement inférieur à 1, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$.
 (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.
3. (a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = 0$
 (b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.