

Solution Capes 2014 Sujet 2, Pbr 2

Partie A. Quelques études d'existence et d'unicité

1. (a) Non, il existe des fonctions discontinues admettant des points fixes sur I .
 (b) Non, car on ne précise pas que I est stable par f (ie. $f(I) \subset I$). Aussi, on peut prendre des fonctions continues n'admettant pas de points fixes sur I , comme par exemple la fonction $x \mapsto -x$ sur $I = [1; 10]$.
2. Considérons donc la fonction g définie sur $I = [0; 1]$ par $g(x) = f(x) - x$. $g(0) = f(0) - 0 = 1 > 0$ et $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$. La fonction f étant continue, nous déduisons que la fonction g l'est aussi. Il s'ensuit alors que, par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $I = [0; 1]$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$. Ainsi, c est un point fixe de la fonction f .
 Nous déduisons l'unicité du point fixe de f de la stricte monotonie de la fonction g . En effet, la fonction f est dérivable d'après le théorème de composition des fonctions dérivables, donc g l'est aussi et nous avons $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ sur $I = [0; 1]$. Aussi, la fonction g est strictement décroissante, donc elle admet un unique zéro sur l'intervalle $I = [0; 1]$.
3. On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et $f([a; b]) = [a; b]$.
 (a) Considérons la fonction g définie sur $[a; b]$ par $g(x) = f(x) - x$. Alors, la fonction g est continue comme somme de deux fonctions continues et $g(a) = f(a) - a \geq 0$ alors que $g(b) = f(b) - b \leq 0$. La fonction g étant continue sur $[a; b]$, nous déduisons du théorème des valeurs intermédiaires que g s'annule sur $[a; b]$. Aussi, il existe $c \in [a; b]$ tel que $g(c) = 0$, d'où $f(c) = c$, c'est-à-dire que f admet un point fixe sur $[a; b]$.
 (b) Supposons de plus f strictement décroissante sur $[a; b]$. Alors la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ est elle aussi décroissante comme somme de deux fonctions décroissantes. Il s'ensuit que, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $[a; b]$ sur $g([a; b]) = [a; b]$ d'où il y a unicité du point c vérifiant $g(c) = 0$, et donc unicité du point fixe de f .
 (c) Si f est strictement croissante sur $[a; b]$, alors nous ne pouvons pas conclure, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions strictement croissantes admettant plusieurs points fixes, comme par exemple la fonction $x \mapsto x$ définie sur $[0; 1]$ (tous ses points sont des points fixes).

Partie B: Etude d'une suite convergeant vers un point fixe

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \alpha$ et g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\alpha}{t} \right)$.

1. (a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. x_0 est un point fixe de g si et seulement si $x_0 + \frac{\alpha}{x_0} = 2x_0$, ie. $x_0^2 = \alpha$. Il s'ensuit alors que x_0 point fixe de g si et seulement si $x^2 - \alpha = 0$.
 (b) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse t est $y = f'(t)(x-t) + f(t) = 2t(x-t) + t^2 - \alpha = 2tx - (t^2 + \alpha)$.
 Cherchons l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses; nous cherchons donc x vérifiant $2tx - (t^2 + \alpha) = 0$, soit $x = \frac{1}{2t}(t^2 + \alpha) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\alpha}{t} \right) = g(t)$. Ainsi, l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses est le point d'abscisse $g(t)$.
 (c) *A FAIRE ICI*
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{\alpha}{u_n} \right)$.
 (a) Supposons que $u_0 = \sqrt{\alpha}$. Alors, nous avons $u_1 = \sqrt{\alpha}$. On montre alors par une récurrence (facile) que, pour tout entier naturel n , $u_n = \sqrt{\alpha}$ d'où la suite (u_n) est stationnaire.
 Démontrons par récurrence sur l'entier $n > 0$ que u_n existe et que $u_n \sqrt{\alpha}$.
 Initialisation: $u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{\alpha}{u_0} \right)$ existe. La fonction g étant dérivable, nous avons $g'(t) = \frac{t^2 - \alpha}{2t^2}$. Aussi, g' s'annule uniquement en $\sqrt{\alpha}$, $g' < 0$ sur $]0; \sqrt{\alpha}[$ et $g' > 0$ sur $]\sqrt{\alpha}; +\infty[$. Aussi, la fonction g atteint un minimum en $\sqrt{\alpha}$, avec $g(\sqrt{\alpha}) = \sqrt{\alpha}$. Par stricte monotonie de g sur les intervalles $]0; \sqrt{\alpha}[$ et $]\sqrt{\alpha}; +\infty[$, que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t \neq \sqrt{\alpha}$, $g(t) > \sqrt{\alpha}$. Il s'ensuit donc que $u_1 = g(u_0) > \sqrt{\alpha}$.
 Hérédité: Supposons, pour $n > 0$ fixé, l'existence de u_n . Alors, $u_{n+1} = g(u_n)$ existe et vérifie $u_{n+1} > \sqrt{\alpha}$.
 Conclusion: Nous obtenons que, pour tout entier naturel n non nul, le terme u_n existe et vérifie $u_n > \sqrt{\alpha}$.

- (b) On suppose donc à présent que $u_0 \neq \sqrt{\alpha}$. Considérons donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(u_n; f(u_n))$. D'après la question **1.2**, nous savons que l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est $g(u_n) = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{\alpha}{u_n} \right) = u_{n+1}$. Nous obtenons donc la formule demandée.
- (c) Nous avons, pour $n > 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{u_n} - u_n \right) = \frac{\alpha - u_n^2}{2u_n}$. Par **B.2.1** nous savons que $u_n > \sqrt{\alpha}$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Aussi, la suite (u_n) est-elle décroissante à partir de u_1 .
- (d) La suite (u_n) est donc décroissante (question précédente) et minorée par $\sqrt{\alpha}$ (question **B.2.1**), donc par le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite. Celle-ci vérifie $\ell \geq \sqrt{\alpha}$. Par continuité de g en ℓ , nous pouvons passer à la limite dans l'inégalité $u_{n+1} = g(u_n)$, vraie pour tout entier naturel n , ce qui donne par unicité de la limite que $\ell = g(\ell)$. Ainsi, ℓ est un point fixe de g . Or, par la question **B.1.1**, nous savons que l'unique point fixe de g est $\sqrt{\alpha}$, d'où la suite (u_n) est convergente et de limite $\sqrt{\alpha}$.
- (e) On suppose ici que $\alpha = \sqrt{2}$. Nous avons $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} - \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2u_n} (u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2) = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{2})^2$. Comme nous savons que $u_n \geq \sqrt{2}$, nous obtenons que $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où nous obtenons que

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} |u_n - \sqrt{2}|^2$$

Aussi, la convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{2}$ est quadratique.

Partie C. un théorème du point fixe

1. Supposons la fonction f contractante sur I : aussi, il existe $\gamma \in [0; 1[$ tel que, pour tout $(x, y) \in I^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \gamma|x - y|$.
Soit alors $\varepsilon > 0$ et posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{\gamma}$. Soit $x \in I$ quelconque. Nous avons alors, pour tout $y \in I$ vérifiant $|x - y| \leq \alpha = \frac{\varepsilon}{\gamma}$, que $|f(x) - f(y)| \leq \gamma|x - y| = \varepsilon$ d'où f est continue en $x \in I$. Comme x quelconque dans I , il s'ensuit que f est continue sur I .

2. (a) Comme I est stable par f , pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. Il s'ensuit que la suite (u_n) est donc bien définie.
- (b) Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Démontrons déjà que si f est une fonction contractante de coefficient de contractance $\gamma \in [0; 1[$, alors $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est contractante de coefficient de contractance γ^n . Pour ce faire,

raisonnons par récurrence sur l'entier naturel $n \geq 1$.

Initialisation: Pour $n = 1$, nous avons $|f(x) - f(y)| \leq \gamma|x - y|$ donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Hérédité: Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 1$ fixé, et démontrons-là au rang $n + 1$. Nous avons $|f^{n+1}(x) - f^{n+1}(y)| = |f(f^n(x)) - f(f^n(y))| \leq \gamma|f^n(x) - f^n(y)| \leq \underbrace{\gamma \times \gamma^n}_{=\gamma^{n+1}} |x - y|$ d'où la propriété est vraie

au rang $n + 1$.

Conclusion: Ainsi, si f est contractante de coefficient de contractance γ , alors $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est

contractante de coefficient de contractance γ^n .

A présent, considérons $|u_{n+p} - u_n| = \left| \sum_{k=n}^{n+p-1} u_{k+1} - u_k \right|$. Par inégalité triangulaire, nous avons $|u_{n+p} - u_n| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |u_{k+1} - u_k| = \sum_{k=n}^{n+p-1} |f^k(u_1) - f^k(u_0)| = \sum_{k=n}^{n+p-1} \gamma^k |u_1 - u_0|$, d'où l'inégalité demandée.

Nous reconnaissons dans l'expression $\sum_{k=n}^{n+p-1} \gamma^k$ la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme γ^n et de raison γ , d'où $\sum_{k=n}^{n+p-1} \gamma^k = \gamma^n \frac{1 - \gamma^p}{1 - \gamma}$.

Comme $\gamma \in [0; 1[$, nous avons la majoration $\sum_{k=n}^{n+p-1} \gamma^k \leq \gamma^n \frac{1}{1 - \gamma}$ d'où la majoration

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{\gamma^n}{1 - \gamma} |u_1 - u_0|$$

- (c) Comme $\gamma \in [0; 1[$, nous obtenons par le critère des suites géométriques la convergence de la suite (γ^n) vers 0. Aussi, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{\gamma^n}{1 - \gamma} |u_1 - u_0| \leq \varepsilon$. Aussi, la suite (u_n) est-elle de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, elle est donc convergente. Comme la suite (u_n) est à valeur dans le fermé $I = [a; b]$, elle converge dans I .

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n) . Comme f continue sur I donc en $\ell \in I$, nous déduisons, en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ que $\ell = f(\ell)$. Aussi, la fonction f admet bien au moins un point fixe $\ell \in I$.
Par ailleurs, supposons ℓ' point fixe de f sur I . Comme f est contractante sur I , il existe $\gamma \in [0; 1[$ tel que $|f(\ell) - f(\ell')| \leq \gamma|\ell - \ell'|$. De $f(\ell) = \ell$ et $f(\ell') = \ell'$, nous déduisons que $\ell = \ell'$ (sinon, nous aboutissons à une absurdité puisque $\gamma < 1$).
4. Soit $f : I \rightarrow I$ une application contractante définie sur le segment I non vide. Alors f admet un unique point fixe dans I .
5. Nous avons que la suite (u_n) converge vers ℓ point fixe de f et comme f contractante nous avons $|u_{n+1} - \ell| \leq \gamma|u_n - \ell|$. Aussi, la vitesse de convergence de (u_n) vers ℓ est au moins géométrique.