Congruences dans $\mathbb{Z}$
Déclic T S

Prérequis Multiples, diviseurs, division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Ecriture décimale d'un entier naturel pour les applications.
Cadre: Dans toute la leçon, on désignera par n un entier naturel $n \geqslant 2$.

I. Congruences dans $\mathbb{Z}$

Définition 1 (*Congruence modulo n*)

Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a est congru à b modulo n, *ce que l'on note $a \equiv b \mod n$ si a et b ont même reste dans la division euclidienne par n.*

Théorème 1 (*Compatibilité*)

Soient a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a \equiv b \mod n$ et $c \equiv d \mod n$. Alors $a + c \equiv b + d \mod n$ et $a \times c \equiv b \times d \mod n$.

Remarque Les réciproques de ces implications sont fausses.

Proposition 1

- *$a \equiv b \mod n$ si et seulement si n divise $(b-a)$.*
- *$a \equiv 0 \mod n$ si et seulement si n divise a.*
- *Si $a \equiv b \mod n$ et $b \equiv c \mod n$ alors $a \equiv c \mod n$.*

Corollaire 1

1. *Pour tout entier relatif k, si $a \equiv b \mod n$ alors $a + k \equiv b + k \mod n$.*
2. *Pour tout entier relatif k, si $a \equiv b \mod n$ alors $ka \equiv kb \mod n$.*
3. *Pour tout entier naturel k, si $a \equiv b \mod n$, alors $a^k \equiv b^k \mod n$.*

II. Applications

A. Critères de divisibilité

Critères classiques (exo 86, 104 page 464, 467 Déclic TS)

On considère un entier naturel a défini par son écriture décimale $a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_1 a_0}$ avec $a_n \neq 0$ et $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Ainsi, $a = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots + 10^n a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$.

1. Enoncer et démontrer les critères de divisibilité d'un entier naturel par 3 ou 9.
2. Montrer qu'un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme de ses chiffres de rang pair diminuée de la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.

Critères de divisibilité par 7 (exo 105 page 467 Déclic TS)

Pour savoir si un entier naturel n est divisible par 7, on sépare le chiffre des unités des autres chiffres et on effectue la différence entre le nombre formé par les autres chiffres et le double du chiffre des unités. L'entier n est divisible par 7 si et seulement si cette différence est divisible par 7.
Par exemple 861 est-il divisible par 7?
On effectue 86-2 $\times$ 1 = 84, puis $8 - 2 \times 4 = 0$ qui est divisible par 7 donc 84 également donc 861 également en appliquant le critère deux fois. Dans cet exercice, on se propose de démontrer ce critère pour un entier naturel de 3 chiffres, dont l'écriture décimale est $n = \overline{abc}$ avec $a \neq 0$.

1. Démontrer que $n \equiv 2a + 3b + c \mod 7$.
2. On appelle m l'entier égal à la différence décrite ci-dessus. Montrer que $m \equiv 3a + b - 2c \mod 7$.
3. En déduire que $n - 3m \equiv 0 \mod 7$ et $m + 2n \equiv 0 \mod 7$.
4. En déduire que $m \equiv 0 \mod 7 \Leftrightarrow m \equiv 0 \mod 7$
5. Conclure.

Exercice 87 page 464

Démontrer de deux façons différentes que, pour tout entier naturel n, $2 \times 9^n - 9 \times 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 91 page 464

1. On considère un entier naturel n vérifiant $n \equiv 4 \mod 7$.
   (a) Montrer que $n^3 - 1$ est divisible par 7.
   (b) Quel est le reste de la division euclidienne de $n^{3p} - 1$ par 7 où p désigne un entier naturel quelconque ?
2. On considère un entier naturel n vérifiant $n \equiv 5 \mod 7$.
   (a) Montrer que $n^3 + 1$ est divisible par 7.
   (b) Quel est le reste de la division euclidienne de $n^{3p} + 1$ par 7 où p désigne un entier naturel quelconque ?

Exercice 93 page 464

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 5 \mod 7$.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 7 ?
2. En déduire les restes possibles de la division euclidienne de $3x$ par 7.
3. Quel est l'ensemble des solutions de cette équation.

Exercice 94 page 464

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + 2 \equiv 0 \mod 9$.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 9?
2. En déduire les restes possibles de la division de x^2 par 9.
3. Montrer que l'ensemble des solutions est formé des ensembles de la forme $9k + 4$ et $9k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 102 page 466

1. On considère la suite géomùétrique (v_n) de premeir terme $v_0 = 13$ et de raison $q = 5$. Pour tout entier naturel n, déterminer le reste de la division euclidienne de v_n par 4.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 14$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 6$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \mod 4$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
   (c) Déduire de la question précédente qu'aucun terme de cette suite n'est divisible par 3.

Exercice 107 page 468

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} &= \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

1. Montrer par récurrence que, dans un repère du plan, les points de coordonnées $(x_n; y_n)$ sont sur la droite dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est un entier naturel.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n est un entier naturel.
3. (a) Montrer que x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
   (b) Montrer que si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils n'ont pas de facteur premier commun dans leur décompossition en produit de facteurs premiers.
4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N},$, $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3.

B. Système de congruences (exo 88 page 503, Déclic TS)

Partie A.

On trouve le problèe suivant dans le livre du mathématicien chinois Sun Zi, le *Sunzi suanjing*, datant du IIIe siècle.

Combien l'armée de Han Xing comprte-t-elle de soldats si, rangés par 3 *colonnes, il reste deux soldats, rangés par* 5 *colonnes, il reste trois soldats, et rangés par* 7 *colonnes, il reste deux soldats*

1. On note n le nombre de soldats de cette armée. Traduire l'énoncé par un système de congruences.
2. Vérifier que 23 est une solution et en déduire une infinité de solutions.

Coup de pouce: Un produit d'entiers est congru à 0 modulo chacun des facteurs de ce produit !

Partie B: Etude d'un système de congruences avec deux équations

1. On considère les entiers n et m supérieurs ou égaux à 2 et de $PGCD$ égal à D, et des entiers relatifs a et b. On note (S) le système $\begin{cases} x \equiv a \mod m \\ y \equiv b \mod n \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.
   (a) Soit x_0 une solution de (S). Montrer que $x_0 \equiv a \mod D$ et $x_0 \equiv b \mod D$. En déduire que $a \equiv b \mod D$. On vient de prouver que (S) ne peut avoir des solutions que si D divise $a - b$.
   (b) Réciproquement, on suppose que $a - b = kD$ avec k entier. Montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $a - b = kum + kvn$. Vérifier alors que l'entier $a - kum$ est solution de (S).
   Conclusion: le système $\begin{cases} x \equiv a \mod m \\ y \equiv b \mod n \end{cases}$ admet des solutions si et seulement si $a \equiv b \mod D$.
   (c) En déduire que (S) admet toujorus des solutions si m et n sont premiers entre eux.
2. On reprend les notions de la question **1** en supposant que $D = 1$ et on note x_0 une solution de (S).
   (a) Vérifier que, pour tout entier relatif t, $x_0 + tnm$ est solution de (S).
   (b) Réciproquement, soit x une solution de (S). Montrer que mbn divise $x - x_0$.

Coup de pouce: Si m divise tt, n divise t et si m et n sont premiers entre eux, alors mn divise t.

Conclusion On a démontré le théorème des restes chinois dans le cas d'un système de deux équations. Si x_0 est une solution du système (S), $\begin{cases} x \equiv a \mod m \\ y \equiv b \mod n \end{cases}$ et si m et n sont premiers entre eux, alors l'ensemble des solutions de (S) est $\{x_0 + tmn; t \in \mathbb{Z}\}$.
Remarque: Pour obtenir une solution particulière x_0 on peut utiliser le calcul de la question **1.**

Partie C: Résolution du système (S) correspondant au problème de Sun Zi énoncé dans la partie A.

Soit les systèmes (S): $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ y \equiv 3 \mod 5 \\ z \equiv 2 \mod 7 \end{cases}$ et (S'): $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$

1. (a) Identification avec les notations de la question **1** de la partie **A.**: précisez les valeurs de a, b, m, n, D et k.
   (b) Déterminer des entiers relatifs u et v tels que $3u + 5v = 1$.
   (c) Donner la solution du système (S') fournie par la question **B.1.b**.
   (d) En déduire, en utilisant le théorème démontré dans la question **B.2**, quel les solutions du système (S') sont les entiers de la forme $8 + 15t$, avec $t \in \mathbb{Z}$.
2. D'apès la question **1.**, un entier x est solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} x \equiv 8 + 15t \ \ avec \ \ t \in \mathbb{Z} \\ x \equiv 2 \mod 7 \end{cases}$
   (a) Montrer que $8 + 15t \equiv 2 \mod 7 \Leftrightarrow t \equiv 1 \mod 7$.
   (b) En déduire que si x est solution de (S), alors il est de la forme $x = 23 + 105h$ avec $h \in \mathbb{Z}$.
   (c) Réciproquement, vérifier que tous les entiers de la forme $23 + 105h$ avec $h \in \mathbb{Z}$ sont solutions de (S).