
Logique et Ensembles.

Support de cours avec corrections.

I.U.P. d'informatique du Mirail

Jean-François Culus

Année 2005-2006

Table des matières

1	Calcul propositionnel	3
1.1	Introduction	3
1.2	Lexique	3
2	Théorie des Ensembles	12
2.1	Premières définitions	12
2.2	Opération sur les ensembles	13
2.3	Diagramme de Venn	16
3	Relations et Applications	19
3.1	Introduction	19
3.2	Relation	19
3.3	Fonctions	20
3.4	Image directe, image réciproque	24
4	Calcul des prédicats	26
4.1	Introduction	26
4.2	Lexique	26
4.3	Mise sous une forme standardisée	29
4.4	Résolution en calcul de prédicats	30
4.5	Résolution par la méthode d'unification	32
5	Bibliographie	37

Introduction

Ce cours de Logique et Ensembles est un enseignement de mathématiques au sein d'une formation professionnalisante en informatique. Aussi, plusieurs choix ont-ils été faits, tant qu'aux prérequis que dans les objectifs de ce module.

Les étudiants (vous donc) sont supposés avoir quelques familiarités avec les notions de logique (typiquement, avoir suivi un cours). Les notions que nous aborderons ne demanderont pas spécialement de prérequis, mais une certaine familiarité est attendue afin de passer relativement rapidement sur certaines méthodes (par exemple, les tables de vérité). Pour la partie ensembles et applications, aucune connaissance n'est supposée de la part des étudiants.

Les objectifs sont multiples : apporter des connaissances qui vous serviront dans d'autres cours (programmation logique), vous familiariser avec un formalisme afin que vous puissiez, par la suite, aborder d'autres notions de manière autonome. Réactualiser certaines connaissances mathématiques au moyen de la logique, afin de vous aider à mieux aborder des enseignements futurs, et enfin, vous apporter une petite culture scientifique sur le sujet (en particulier, que vous ne soyez pas ignorants sur la notion de complexité, voire les liens entre logique et base de donnée...).

La forme de ce cours a été résolument voulue basée sur l'interactivité et la recherche personnelle des étudiants ; c'est pourquoi, la partie cours est des plus succincte. Les notions sont généralement définies au cours d'un exercice dans lequel elles sont immédiatement utilisées.

Ce cours est découpé en 4 chapitres, une première révision des bases de la logique, puis un chapitre portant sur les Ensembles, le troisième porte sur les Applications et le dernier sur le calcul des Prédicats.

1 Calcul propositionnel

1.1 Introduction

Une phrase assertive (par exemple « il fait beau » ou « j'aimerais aller à la piscine ») peut faire l'objet d'un jugement de vérité, c'est-à-dire qu'elle peut être soit *Vraie*, soit *Fausse* (selon les circonstances, que l'on appellera ici plutôt selon le modèle). Ces phrases assertives particulières sont modélisées par des *variables propositionnelles*, qui sont des variables pouvant prendre deux valeurs : 0 (ou *Faux*) et 1 (ou *Vrai*). Ces variables sont désignées par les lettres p, q, r ou encore par ces mêmes lettres indicées $p_0, p_1, r_i \dots$

Certaines phrases assertives sont composées de connecteurs logiques (par exemple « il fait beau et j'aimerais aller à la piscine »); la valeur de vérité d'une telle phrase est alors fonction du jugement de vérité que l'on porte à chacune des variables propositionnelles la composant. Si, à l'instant choisi, il fait effectivement beau et que, effectivement, j'aimerais aller à la piscine, alors la phrase composée sera elle-même *Vraie*.

1.2 Lexique

Une *expression propositionnelle* (ou proposition) est une séquence de symboles pouvant appartenir aux catégories suivantes :

- Les variables propositionnelles.
- les connecteurs logiques : $\neg$ (non), $\wedge$ (et), $\vee$ (ou inclusif) et $\rightarrow$ (implication).
- des parenthèses, servant à lever l'ambiguïté dans la phrase.

Note : En français, le « ou » à deux interprétations : la première est inclusive (les deux cas peuvent se produire), la seconde est exclusive (seul l'un des deux cas peut se produire, à l'exclusion de l'autre). Le symbole $\vee$ représente le *ou inclusif*.

Exercice 1 Sémantique

Toute suite composée de variables propositionnelles, parenthèses et connecteurs logiques n'a pas de sens logique, comme par exemple :

$$(\rightarrow \vee r.$$

Une expression propositionnelle est dite **bien formée** si elle peut être obtenue par un nombre quelconque des règles de syntaxe suivantes :

R1 Une variable propositionnelle est une expression propositionnelle bien formée.

R2 Si E est une expression propositionnelle bien formée, alors $\neg E$ l'est aussi.

R3 si E_1 et E_2 sont des expressions propositionnelles bien formées, alors $E_1 \vee E_2$, $E_1 \wedge E_2$ et

$E_1 \rightarrow E_2$ sont aussi des expressions propositionnelles bien formées.

Les expressions suivantes sont-elles bien formées ? (ajouter éventuellement des parenthèses pour « désambiguïser » ces expressions).

1. $\neg p \rightarrow qr$
2. $(\neg p) \rightarrow q \wedge r$
3. $(p \neg) \rightarrow (q \vee r)$

Non, puisque $\neg p$ n'est pas une expression bien formée.

4. $\neg(\rightarrow p)$

.....

1. $\neg p \rightarrow qr$

Non, puisque si q et r sont des variables propositionnelles, qr n'a pas de sens (contrairement à $q \wedge r$ par exemple).

2. $(\neg p) \rightarrow q \wedge r$

Cette expression est bien formée mais ambiguë. En effet, si l'on ne connaît pas les priorités de calcul, nous pouvons l'interpréter comme $(\neg p) \rightarrow (q \wedge r)$ (la bonne interprétation) ou comme $((\neg p) \rightarrow q) \wedge r$. Aussi faut-il veiller à désambigüiser les expressions par des parenthèses.

Note : En fait, les parenthèses n'appartiennent pas au langage ; i.e. elles sont inutiles si l'on connaît bien les règles de priorité, mais elles facilitent la lecture des expressions.

3. $(p \neg) \rightarrow (q \vee r)$

Non, puisque $\neg p$ n'est pas une expression bien formée.

4. $\neg(\rightarrow p)$

Non, puisque $\rightarrow p$ n'est pas bien formée.

Note : On peut néanmoins donner un sens à la précédente expression. En effet, on peut considérer qu'il s'agit de la négation de $\emptyset \rightarrow p$, mais c'est malgré tout bien maladroit.

Exercice 2 Table de vérité des Connecteurs logiques

Compléter les tables de vérité suivantes :

p	$\neg p$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \rightarrow q$
V		V	V		V	V		V	V	
V		V	F		V	F		V	F	
F		F	V		F	V		F	V	
F		F	F		F	F		F	F	

Indications pour ceux n'ayant jamais fait de logique : Le $\vee$ est le « ou inclusif », c'est-à-dire fromage $\vee$ dessert signifie que vous pouvez prendre du fromage et du dessert. $p \rightarrow q$ est « logiquement équivalent » à $\neg p \vee q$ (l'explication sera donnée ultérieurement).

p	$\neg p$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \rightarrow q$
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V

Remarques : Suez le fait que $p \rightarrow q$ soit *logiquement équivalent* à $\neg p \vee q$. Cela résulte du « raisonnement » suivant, partant du principe du tiers exclu ($p \vee \neg p$), l'implication $p \rightarrow q$ permet d'obtenir $\neg p \vee q$.

Réciproquement, $\neg p \vee q$ et le principe de non contradiction ($p \wedge \neg p$ est absurde) impliquent $p \rightarrow q$. C'est pourquoi, lorsque p est faux, $p \rightarrow q$ est vrai (puisque $\neg p$ devient vrai, donc $\neg p \vee q$ est vrai quelque soit la valeur de vérité de q).

Exercice 3 Equivalence logique

Deux propositions sont dites **logiquement équivalentes** (ou **équivalentes** ou encore **égales**) si elles ont mêmes tables de vérité.

On définit les connecteurs $\leftrightarrow$ et $|$ par les tables suivantes :

p	q	$p \leftrightarrow q$	p	q	$p q$
V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V

1. Montrer, en complétant la table de vérité suivante, que $p \leftrightarrow q$ est logiquement équivalent à $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V			
F	V			
V	F			
F	F			

2. Montrer que $p|q$ est logiquement équivalent à $\neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V		
F	V		
V	F		
F	F		

3. Pouvez-vous trouver une équivalence logique entre $p \leftrightarrow q$ et $p|q$?

1. Montrer que $p \leftrightarrow q$ est logiquement équivalent à $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V

On constate que les tables de vérités de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ et de $p \leftrightarrow q$ sont identiques ; aussi, ces expressions sont-elles logiquement équivalentes.

2. Montrer que $p|q$ est logiquement équivalent à $\neg(p \wedge q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
F	V	F	V
V	F	F	V
F	F	F	V

Ainsi, les expressions $p|q$ et $\neg(p \wedge q)$ ont même tables de vérité ; elles sont donc logiquement équivalentes.

3. Pouvez-vous trouver une équivalence logique entre $p \leftrightarrow q$ et $p|q$?

On remarque que $p|q$ ne prend pas le même nombre de fois la valeur vraie et la valeur fausse, alors que $p \rightarrow q$ prend le même nombre de fois les valeurs vraies et fausses. Aussi, ces deux expressions ne peuvent-elles être logiquement équivalentes.

Exercice 4 Tautologies et contradictions

Une **tautologie** est une proposition toujours vraie, quelque soit les valeurs de vérités affectées aux variables propositionnelles la composant. Une **contradiction** est une proposition toujours fausse, quelques soit les valeurs de vérités affectées aux variables la composant.

Montrer, à l'aide des tables de vérités, que les propositions suivantes sont des tautologies :

- $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
 - $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$
 - $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
 - $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$
-

-
5. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \leftrightarrow q$
6. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$
7. $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \leftrightarrow q$
8. **Contraposée** $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
9. Montrer que $p \wedge \neg p$ est une contradiction (principe de non-contradiction).
-

1. $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$(\neg\neg p) \leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

2. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$
V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

3. $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

4. $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge (\neg q))$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$p \wedge (\neg q)$	$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge (\neg q)$
V	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V

5. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \leftrightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	F	V	F	V

6. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

7. $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \leftrightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$	$((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \leftrightarrow q$
V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V

8. **Contraposée** $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	Prop
V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

9. $p \wedge \neg p$ est une contradiction (dit principe de non-contradiction).

p	$\neg p$	$\neg p \wedge p$
V	F	F
F	V	F

Exercice 5 Réciproque, contraposée et négation

Si P est une phrase assertive, la **négation** de P est $\neg P$. Lorsque cette phrase est une implication $(A \rightarrow B)$, la réciproque de cette implication est l'implication $B \rightarrow A$ alors que la **contraposée** de P est l'implication $\neg B \rightarrow \neg A$.

Donnez, pour chacune des phrases assertives suivantes, sa réciproque, sa contraposée et sa négation. Précisez, lorsque cela vous est possible, pour chaque assertion obtenue, si elle est vraie ou non.

1. S'il pleut, alors mon jardin est mouillé.
 2. Si a est un réel strictement positif, alors $a + \frac{1}{a} \geq 2$.
 3. Si a est un réel positif, alors $\sin(a) \leq a$.
 4. Si a est un réel positif, alors $\cos(a) \leq a$.
 5. Si f et g sont deux fonctions à valeurs réelles croissantes, alors $f + g$ est une fonction croissante.
 6. Si $a + b = c + d$, alors $a = c$ et $b = d$.
-

1. S'il pleut, alors mon jardin est mouillé.

Réciproque : Si mon jardin est mouillé, alors c'est qu'il pleut.

Contraposée : Si mon jardin n'est pas mouillé, c'est qu'il ne pleut pas.

Négation : Mon jardin est mouillé et il ne pleut pas.

2. Si a est un réel strictement positif, alors $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Réciproque : Si $a + \frac{1}{a} \geq 2$, alors a est un réel strictement positif.

Contraposée : Si $a + \frac{1}{a} < 2$, alors a n'est pas un réel strictement positif.

Négation : a est un réel strictement positif et $a + \frac{1}{a} < 2$.

Pour savoir si la proposition initiale est vraie, il faut étudier la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, qui s'annule pour $x = 1$ ou $x = -1$. Le minimum sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction f est donc obtenue en 1, et $f(1) = 2$. Ainsi, cette proposition est vraie.

Sa réciproque est fausse (par exemple, $a = -1$ vérifie la propriété).

Sa négation est, bien sûr fausse (la proposition étant vraie).

3. Si a est un réel positif, alors $\sin(a) \leq a$.

Réciproque : Si $\sin(a) \leq a$ alors a est un réel positif.

Contraposée : Si $\sin(a) > a$ alors a n'est pas un réel positif.

Négation : a est un réel positif et $\sin(a) > a$.

Pour savoir si la proposition initiale est vraie, on étudie la fonction $x \rightarrow f(x) = \sin(x) - x$. Pour cela, la dérivée est $f'(x) = \cos(x) - 1$, qui est toujours négative (ou nulle) puisque $|\cos(x)| \leq 1$. La fonction $f(x) = \sin(x) - x$ est décroissante, et $f(0) = 0$. Ainsi, la proposition initiale est vraie. La réciproque est vraie ; l'étude de la fonction $f(x) = \sin(x) - x$ a montré que cette fonction était décroissante et qu'elle s'annulait en 0. Ainsi, si $\sin(a) \leq a$, $a \leq 0$.

La contraposée est vraie.

La négation est fausse (par exemple pour $a = \pi$, $\sin(\pi) = -1 < \pi$).

4. Si a est un réel positif, alors $\cos(a) \leq a$.

Réciproque : Si $\cos(a) \leq a$, alors a est un réel positif.

Contraposée : Si $\cos(a) > a$, alors a est un réel négatif.

Négation : a est un réel positif et $\cos(a) > a$.

La proposition initiale n'est pas vraie, par exemple en considérant $a = 0$.

La réciproque, par contre, est vraie : en effet, si $\cos(a) \leq a$, alors puisque la fonction $f(x) = \cos(x) - x$ est décroissante et $f(0) = 1$, il s'ensuit que si $f(a)$ est négative, alors a est strictement positif.

La contraposée est aussi fausse, par exemple en considérant $a = 0$.

La négation est vraie (puisque la proposition est fausse).

5. Si f et g sont deux fonctions croissantes à valeurs réelles, alors $f + g$ est une fonction croissante.

Réciproque : Si $f + g$ est une fonction croissante, alors f et g sont des fonctions croissantes.

Contraposée : Si $f + g$ n'est pas une fonction croissante, alors f et g ne sont pas deux fonctions croissantes.

Négation : f et g sont des fonctions croissantes et $f + g$ n'est pas une fonction croissante.

Remarque : Attention, la négation de f est une fonction croissante n'est pas « f est une fonction décroissante ». Il existe en effet des fonctions non croissantes et non décroissantes...

La proposition initiale est bien sûr vraie.

La réciproque est fausse, par exemple en considérant $f(x) = 2x$ et $g(x) = -x$.

La contraposée est vraie, et la négation est fausse.

6. Si $a + b = c + d$, alors $a = c$ et $b = d$.

Réciproque : Si $a = c$ et $b = d$ alors $a + b = c + d$.

Contraposée : Si $a \neq c$ ou $b \neq d$, alors $a + b \neq c + d$.

Négation : Il existe a, b, c et d tel que $a + b = c + d$ et soit $a \neq c$, soit $b \neq d$.

La proposition est fausse ($a = d = 2$, $c = b = 3$).

La réciproque est vraie.

La contraposée est fausse.

La négation est vraie.

Exercice 6 Système minimal de connecteurs

Les différents connecteurs logiques $\{\neq, \vee, \wedge, \rightarrow\}$ que nous venons de présenter sont redondants, c'est-à-dire que nous pouvons tous les exprimer à l'aide d'un nombre plus petit de connecteurs.

1. Montrer que vous pouvez exprimer $p \wedge q$ et $p \rightarrow q$ à l'aide des seuls connecteurs logiques $\neg$ et $\vee$.

2. Montrer de même que vous pouvez exprimer tous les connecteurs logiques précédents à l'aide des seuls $\neg$ et $\wedge$.

3. La **barre de Sheffer** (**NAND** en informatique), notée $|$, est définie dans l'exercice 3. Montrer que la barre de Sheffer est un **connecteur universel**, c'est-à-dire que tous les connecteurs logiques précédemment définis peuvent s'exprimer à l'aide de la seule barre de Sheffer.

1. Il suffit de montrer que $\neg(\neg p \vee \neg q)$ est logiquement équivalent à $p \wedge q$ et que $q \vee (\neg p)$ est logiquement équivalent à $p \rightarrow q$. Pour cela, nous allons comparer les tables de vérités.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$\neg((\neg p) \vee (\neg q))$	$p \wedge q$
V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

p	q	$\neg p$	$q \vee (\neg p)$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	F	V	V	V

2. Il suffit cette fois-ci de montrer que $p \vee q$ est logiquement équivalent à $\neg(\neg p \wedge \neg q)$. De même, on peut montrer que $p \rightarrow q$ est logiquement équivalent à $\neg(\neg q \wedge p)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$
V	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V

3. Nous allons montrer que $\neg p$ est logiquement équivalent à $p|p$. De même, on prouve que $p \wedge q$ et $p \vee q$ sont respectivement logiquement équivalentes à $(p|q)|(p|q)$ et $(p|p)|(q|q)$.

p	p p	$\neg p$	p	q	p q	(p q) (p q)	p ∧ q	p	q	p p	q q	(p q) (p q)	p ∨ q
V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F	F

Exercice 7 Formes équivalentes à la double implication

Le fait de pouvoir réécrire une expression à l'aide d'un petit nombre de connecteurs logiques permet d'obtenir une écriture normalisée des propositions. Les deux dernières ici présentées sont largement utilisées pour formaliser les expressions logiques.

1. Ecrire $p \leftrightarrow q$ uniquement à l'aide des connecteurs logiques $\neg$ et $\vee$.
2. **Forme Normale Conjonctive** : Ecrire $p \leftrightarrow q$ comme conjonction de disjonctions.
3. **Forme Normale Disjonctive** : Ecrire $p \leftrightarrow q$ comme disjonction de conjonctions.

1. La proposition $p \leftrightarrow q$ correspond à $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, ce qui est logiquement équivalent à $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$. Pour éliminer le symbole $\wedge$, il faut utiliser le fait que $p \wedge q$ soit équivalent à $\neg(\neg p \vee \neg q)$. Ainsi, la proposition initiale est équivalente à $\neg((\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee \neg p))$.

2. Nous l'avons rencontrée lors du raisonnement précédent ; il s'agit de l'expression $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$.

3. Partons de la précédente forme normale conjonctive. Par distribution, nous avons alors l'expression $[\neg p \wedge (\neg q \vee p)] \vee [q \wedge (\neg q \vee p)]$. Par distribution, nous obtenons alors : $[(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p)] \vee [(q \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)]$. Cette expression est déjà sous forme normale disjonctive (enlever les crochets, et on a bien une expression sous forme de disjonctions de conjonctions). Néanmoins, il est aisé de simplifier cette expression. $\neg p \wedge p$ n'est jamais vrai ; aussi $(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p)$ est logiquement équivalent à $(\neg p \wedge \neg q)$. De même, on peut supprimer $q \wedge q$, et obtenir $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)$.

Exercice 8 Evaluation des expressions propositionnelles

On considère une expression propositionnelle E bien formée. L'évaluer, c'est indiquer la valeur qu'elle prend pour toute combinaison de valeurs de vérité des variables propositionnelles qu'elle comporte. On associe alors un arbre à la formule propositionnelle.

1. $E_1 : (p \vee q) \longleftrightarrow (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ à pour arbre associé :

$$(p \vee q) \longleftrightarrow (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$$

Compléter alors le tableau suivant :

$(p$	$\vee$	$q)$	$\longleftrightarrow$	$(\neg$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$q)$
V		V			V		V		V
V		F			V		F		F
F		V			F		V		V
F		F			F		F		F

A quel condition ce raisonnement est-il vrai ?

2. On considère le raisonnement suivant :

Amélie est toujours bouleversée lorsqu'elle lit un poème de Baudelaire. Or, Amélie est bouleversée par le poème qu'elle lit actuellement. Donc Amélie lit un poème de Baudelaire.

On donne pour formaliser le précédent raisonnement les symboles suivants :

- p : « Amélie lit actuellement un poème de Baudelaire »
- q « Amélie est bouleversée. »

a. Donnez l'expression propositionnelle formalisant le raisonnement.

b. Évaluez cette proposition.

c. Le raisonnement précédent est-il **valide** (i.e. est-ce une tautologie) ? Si non, proposez un « monde » dans lequel il est faux.

3. On considère le raisonnement suivant :
- Si Amélie porte ses livres, c'est qu'elle va à la faculté. Or, Amélie ne va pas à la fac donc elle ne porte aucun livre.*
- On formalise le précédent raisonnement par :
- p : « Amélie porte des livres »
 - q « Amélie va à la faculté. »
- a. Donnez l'expression propositionnelle formalisant le raisonnement.
- b. Évaluez cette proposition.
- c. Le raisonnement précédent est-il **valide** (i.e. est-ce une tautologie) ? Si non, proposez un « monde » dans lequel il est faux.

1. Nous obtenons le tableau suivant :

(p	∨	q)	↔	(¬	(p	→	q)	∧	q)
V	V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	F	F	F

Ainsi ce raisonnement est vrai lorsque p et q sont faux.

2.a. La première assertion se traduit par $p \rightarrow q$ (le fait de lire un poème de Baudelaire implique qu'elle est bouleversée). La seconde est simplement q et la conclusions de ce raisonnement est p .

Aussi, le raisonnement entier est formalisé par : $(p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$.

2.b. Pour évaluer cette proposition, il faut regarder lorsque le raisonnement $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$ est vrai.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge q$	$((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V	V
F	V	V	V	F
V	F	F	F	V
F	F	V	F	V

2.c. Ainsi, le raisonnement est vrai sauf si p est faux et q est vrai (c'est-à-dire que ce raisonnement est faux dans un monde dans lequel "Amélie ne lit pas un poème de Baudelaire alors qu'elle est bouleversée". Aussi, ce n'est pas une tautologie.

3. a. La première assertion se traduit par $p \rightarrow q$, la seconde par $\neg q$ et la conclusion par $\neg p$.

3.b.

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
V	V	V	F	V
F	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	F	V	V	V

3.c. Le raisonnement précédent est une tautologie (il est toujours vrai, quelque soit la valeur de vérité des prédicats). Ainsi, quelque soit le monde que l'on imagine, le raisonnement est valide dans celui-ci! .

2 Théorie des Ensembles

2.1 Premières définitions

C'est Cantor qui, le premier, élaborait une théorie des ensembles. « Par ensemble, on entend regroupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée ». Ces objets sont appelés **éléments**.

Si a est un élément de l'ensemble E , on note $a \in E$. Soient E et F deux ensembles. Si pour tout élément a de E , nous avons $a \in F$, on dit que l'ensemble F est **inclus** dans l'ensemble E , ou encore que F est une partie de E , et on note cette relation $F \subset E$.

Un ensemble peut être défini de deux façons :

- En **extension**, par la donnée de la liste de ces éléments (ex : $\{\text{Benoit}, \text{Virginie}, \text{Aude}\}$).
- En **compréhension** par la donnée d'une propriété caractéristique des éléments (par exemple, l'ensemble des filles d'une classe, ou encore les agriculteurs, ou le fait d'être un entier pair). À ce titre, la propriété donnée ne peut être quelconque ; on dit qu'elle doit être collectivisante. Par exemple, $x \in x$ n'est pas une telle propriété.

Un ensemble ayant un unique élément est un **singleton**, alors qu'un ensemble ayant deux éléments est une **paire**. Il existe un ensemble n'ayant aucun élément, appelé **ensemble vide**, et noté $\emptyset$. L'ensemble contenant tous les éléments est appelé l'**univers**. Le nombre d'éléments d'un ensemble est dit le **cardinal** de l'ensemble.

Exercice 9 Définition d'ensembles

Précisez le cardinal des ensembles suivants, et les écrire en extension lorsqu'ils sont donnés en compréhension.

1. $E_1 = \{x \in \mathbb{N} : x^3 = 2\}$.
2. $E_2 = \{x : x \text{ est une lettre de l'alphabet, } x \text{ est une voyelle}\}$.
3. $E_3 = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 2 = 0\}$.
4. $E_4 = \{(x, y) / x \in \{1, 2, \dots, 6\}, y \in \{1, 2, \dots, 6\} \text{ et } x + y = 10\}$.
5. $E_5 = \emptyset$
6. $E_6 = \{\emptyset\}$
7. $E_7 = \{\{\emptyset\}\}$
8. $E_8 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

1. Il n'y a qu'un élément dont le cube soit égal à 2, donc $\text{Card}(E_1) = 1$ et $E_1 = \{\sqrt[3]{2}\}$. Un tel ensemble est aussi dit « singleton ».

2. Nous pouvons écrire en extension cet ensemble ; il s'agit de $\{a, e, i, o, u, y\}$, et donc son cardinal est 6.

3. Il nous faut résoudre cette équation d'ordre 2. On obtient alors que $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Ainsi, ce polynôme s'annule en deux valeurs différentes ; $E_3 = \{-1, -2\}$ et est de cardinal 2.

4. E_4 est un ensemble de couples de nombres compris entre 1 et 6 et dont la somme fait 10, soit $E_4 = \{(5, 5), (6, 4), (4, 6)\}$. Ainsi, $\text{Card}(E_4) = 3$.

5. Il s'agit de l'ensemble vide : il ne contient aucun élément, donc est de cardinal nul.

6. Il s'agit d'un ensemble contenant l'ensemble vide : il contient donc un unique élément.

7. Il s'agit d'un ensemble contenant un élément (en l'occurrence, l'ensemble précédent).

Ainsi, $\text{Card}(E_7) = 1$.

8. Là encore, il s'agit d'un ensemble contenant un unique ensemble (qui lui est de cardinal 5). Ainsi, $E_8 = 1$.

2.2 Opération sur les ensembles

L'**union** de deux ensembles A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A ou à B , soit : $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments appartenant à la fois à A et à B , soit : $A \cap B = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Le **complémentaire** de A est l'ensemble des éléments (de l'univers) n'appartenant pas à l'ensemble A , soit $A^c = \{x : x \notin A\}$. On le note aussi $\bar{A}$.

Exercice 10 Différence et différence symétrique

Soient A et B deux parties de l'ensemble E . On définit la **différence** de A et B par :

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

La **différence symétrique** de A et B est définie par :

$$A \Delta B = \{x : [x \in A \text{ et } x \notin B] \text{ ou } [x \in B \text{ et } x \notin A]\}.$$

1. Simplifiez les expressions suivantes : $A \setminus \emptyset$; $A \setminus E$; $E \setminus A$.
2. Exprimez $A \setminus B$ à l'aide de l'intersection et du complémentaire.
3. Simplifiez les expressions suivantes : $A \Delta \emptyset$; $A \Delta E$; $A \Delta A$.
4. Comparez $A \Delta B$ avec $B \Delta A$.
5. Simplifiez l'expression suivante : $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.
6. Montrez l'égalité suivante : $A \Delta (B \Delta C) = A \Delta [(A \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)]$.

$$\begin{aligned}
 & 1. A \setminus \emptyset = A. \quad A \setminus E = \emptyset, \quad E \setminus A = A^c. \\
 & 2. A \setminus B = A \cap (A \cap B)^c. \\
 & 3. A \Delta \emptyset = A^c. \quad A \Delta E = A^c. \quad A \Delta A = \emptyset. \\
 & 4. A \Delta B = B \Delta A. \\
 & 5. A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B). \\
 & 6. A \Delta (B \Delta C) = A \Delta [(A \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)] \\
 & = [A \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C))] \cup [\bar{A} \cap ((B \cap C) \cup (\bar{B} \cap C))] \\
 & = [A \cap ((B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C))] \cup [\bar{A} \cap ((B \cap C) \cup (\bar{B} \cap C))] \\
 & = [A \cap ((C \cap \bar{B}) \cup (\bar{C} \cap B))] \cup [\bar{A} \cap ((B \cap C) \cup (\bar{B} \cap C))] \\
 & = [A \cap B \cap C] \cup [A \cap \bar{B} \cap \bar{C}] \cup [\bar{A} \cap ((B \cap C) \cup (\bar{B} \cap C))] \\
 & = (A \Delta B) \Delta C.
 \end{aligned}$$

Exercice 11 Opérations élémentaires sur les ensembles

On considère les ensembles suivants comme parties de $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

$A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 4\}$, $C = \{1, 3, 5\}$

Donnez en extension les ensembles suivants, et précisez leur cardinal.

1. $A \cup B$.
2. $A \setminus B$.
3. $A \cap C$.
4. $(A \cap B) \cup C$.
5. $(A \Delta B)^c \cap C$.

-
1. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et $\text{Card}(A \cup B) = 5$.
 2. $A \setminus B = \{1, 3\}$ et $\text{Card}(A \setminus B) = 2$.
 3. $A \cap C = \{1, 3\}$ et $\text{Card}(A \cap C) = 2$.
 4. $(A \cap B) \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ et $\text{Card}(A \cap B) \cup C = 5$.
 5. Déjà, $A \Delta B = \{1, 3\}$, donc $(A \Delta B)^c = \{0, 2, 4, 5\}$ et donc $(A \Delta B)^c \cap C = \{0, 5\}$ et est de cardinal égal à 2.
-

Exercice 12 *Simplifications*

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Simplifier l'écriture des ensembles suivants :

1. $A \cap (A \cup B)$
2. $A \cup (A \cap B)$
3. $A \cap (\overline{A} \cup B)$
4. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

-
1. $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A$ puisque $A \cap B \subset A$.
 2. $A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B) = A$ car $A \subset A \cup B$.
 3. $A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = A \cap B$ puisque $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
 4. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$. Pour le voir facilement, il suffit de remarquer qu'il s'agit d'une partition de $A \cup B$.

A

B

$A \cap \overline{B}$

$A \cap B$

$B \cap \overline{A}$

Exercice 13 *Manipulation sur les opérations sur les ensembles*

Soient A , B et C des parties d'un ensemble E . Démontrer :

1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. $[A \subset B] \leftrightarrow [A \cap B = A] \leftrightarrow [\overline{B} \subset \overline{A}]$.
4. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
5. Si $(A \cap B) \subset (A \cap C)$ et $(A \cup B) \subset (A \cup C)$, alors $B \subset C$.

-
1. $\overline{\overline{A}} = A$.
 1. On revient à la définition de $\overline{A} = \{x : x \in E \text{ et } x \notin A\}$. Ainsi, $\overline{\overline{A}} = \{x : x \in E, x \notin \overline{A}\} = \{x : x \in E \text{ et } x \in A\} = A$.
 2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
 2. Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Ainsi, $\neg[x \in A \cup B] = [\neg(x \in A)]$ et $[\neg(x \in B)]$. Nous en déduisons alors que $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.
Par un raisonnement analogue, nous obtenons la seconde assertion.
 3. $[A \subset B] \leftrightarrow [A \cap B = A] \leftrightarrow [\overline{B} \subset \overline{A}]$.
 3. Supposons $A \subset B$. Alors $A \cap B = A$, et donc $[A \subset B] \rightarrow [A \cap B = A]$. A présent, supposons que $A \cap B = A$. $\overline{A} = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Ainsi en déduisons-nous que $\overline{B} \subset \overline{A}$.
-

Supposons maintenant que $\overline{B} \subset \overline{A}$. Nous avons alors : $\neg[x \in B] \rightarrow \neg[x \in A]$, qui est équivalent à $[x \in A] \rightarrow [x \in B]$, soit $A \subset B$.

$$4. (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

4. Ici, on développe "simplement" l'expression sans faire de simplification, puis on simplifie dans la dernière ligne, en utilisant le principe « si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$ ».

$$\begin{aligned} & [(A \cup B) \cap B] \cup [(A \cup B) \cap C] \cap (C \cup A) \\ = & [(A \cup B) \cap B] \cup [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap C] \cap (C \cup B) \\ = & [(A \cap B) \cup B] \cup [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \cap (C \cup B) \\ = & [(A \cap B) \cap (C \cup B)] \cup [B \cap (C \cup B)] \cup [(A \cap C) \cap (C \cup B)] \cup [(B \cap C) \cap (C \cup B)] \\ = & (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (B \cap C) \cup (B \cap C) \\ = & (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

$$5. \text{ Si } (A \cap B) \subset (A \cap C) \text{ et } (A \cup B) \subset (A \cup C), \text{ alors } B \subset C.$$

Soit $x \in B$. Nous devons montrer que $x \in C$.

Puisque $B \subset A \cup B$, alors $x \in A \cup B \subset A \cup C$.

Supposons que $x \in C$: alors, c'est terminé.

Sinon, $x \in A$ et puisque $x \in B$, nous avons $x \in A \cap B \subset A \cap C$. Ainsi, $x \in C$, ce qui est absurde, et donc $x \in C$.

Note : Ne pas confondre le fait que $x \in C$ est absurde, puisque l'on se trouve dans la partie "sinon", et $x \in C$ qui est la conclusion du raisonnement par l'absurde (i.e. le cas 2 est absurde, donc seul le cas 1 est possible).

Exercice 14 Ensemble des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(E) = \{A : A \subset E\}$$

1. Ecrire en extension les ensembles suivants : $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$, $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.
 2. Est-il vrai que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?
 3. Est-il vrai que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?
 4. Soit A un ensemble de cardinal égal à n . Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(A)$?
-

Soit E un ensemble. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E , c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(E) = \{A : A \subset E\}$$

1. $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
2. Pour montrer l'égalité entre deux ensembles, la méthode générale est de montrer une double inclusion.

Soit $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$, c'est-à-dire $C \subset A \cap B$. Ainsi, $C \subset A$ et $C \subset B$, donc $C \in \mathcal{P}(A)$ et $C \in \mathcal{P}(B)$. Ainsi, $C \in \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(B)$.

A présent, considérons C élément de $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(B)$. Ainsi, $C \subset A$ et $C \subset B$, donc $C \subset A \cap B$, et finalement $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

Nous obtenons donc bien l'égalité : $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

3. Nous avons $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. En effet, si $C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{B}$, alors soit $C \subset A \subset A \cup B$ et donc $C \in \mathcal{P}(A \cup B)$, soit $C \subset B \subset A \cup B$ et donc $C \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

L'inverse n'est pas nécessairement vrai. Par exemple, si $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, alors $A \cup B = \{1, 2\}$. Alors $C = \{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, mais $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ ne contient pas C . Nous n'avons donc pas l'inclusion réciproque.

4. Si $B \subset A$, alors nous pouvons nous demander, pour tout élément de A , s'il appartient ou non à B . Nous avons ainsi un arbre de décision à n noeuds, chacun ayant 2 descendants. Nous obtenons alors $\text{Card}(A) = 2^n$.
 Nous reviendrons sur cette démonstration ultérieurement avec la théorie des applications entre ensembles.

2.3 Diagramme de Venn

Exercice 15 Cardinaux et opérations élémentaires

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E . Montrer que :

1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
2. $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$.

1. Nous savons, par l'exercice 12, que $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$ est une partition de $A \cup B$. Ainsi, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A \cap \overline{B}) + \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(\overline{A} \cap B)$.

Or, $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ forme une partition de A ; aussi, $\text{Card}(A) = \text{Card}(A \cap \overline{B}) + \text{Card}(A \cap B)$. De même, par symétrie : $\text{Card}(B) = \text{Card}(B \cap \overline{A}) + \text{Card}(A \cap B)$. Nous obtenons alors : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

2. $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}((A \cup B) \cap C) + \text{Card}((A \cup B) \cap \overline{C})$
 $= \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}((A \cup B) \cap \overline{C})$
 $= \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}((A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}))$
 $= \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap \overline{C}) + \text{Card}(B \cap \overline{C})$
 $= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$.

Exercice 16 Diagramme de Venn

100 des 120 étudiants inscrits en première année apprennent au moins une langue étrangère, parmi l'anglais, l'italien et l'espagnol. Le département de langue nous informe que :

- 65 apprennent l'anglais
- 45 apprennent l'italien
- 42 apprennent l'espagnol
- 20 apprennent l'anglais et l'italien
- 25 apprennent l'anglais et l'espagnol
- 15 apprennent l'italien et l'espagnol

Italien

Anglais

Espagnol

Completez ce diagramme

en indiquant le cardinal de chaque classe.

1. Combien y-a-t-il d'étudiant pratiquant les trois langues ?

2. Combien d'étudiants pratiquant exactement une langue étrangère ?

1. Combien y-a-t'il d'étudiants étudiant les trois langues ?

On utilise la formule 2. de 15 : Soit A l'ensemble des étudiants apprenant l'anglais, B celui des étudiants apprenant l'italien et C celui des étudiants apprenant l'espagnol. Nous avons : $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$. Ainsi, $100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + \text{Card}(A \cap B \cap C)$, et donc $\text{Card}(A \cap B \cap C) = 8$.

2. Combien d'étudiants étudient exactement une langue étrangère ?

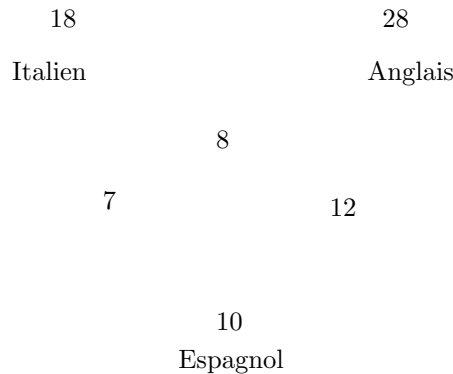
Cherchons déjà l'ensemble des étudiants apprenant uniquement l'anglais. Cet ensemble est $A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B \cup C}$.

Considérons la partition de l'ensemble A des étudiants apprenant l'anglais suivante : $A = A \cap \overline{B \cup C} + A \cap (B \cup C)$. Ainsi, nous avons : $\text{Card}(A) = \text{Card}(A \cap \overline{B \cup C}) + \text{Card}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \text{Card}(A \cap \overline{B \cup C}) + \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(A \cap B \cap C)$. Ainsi, nous avons : $\text{Card}(A \cap \overline{B \cup C}) = \text{Card}(A) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C) = 65 - 20 - 25 + 8 = 28$.

Nous obtenons les autres formules par permutation circulaire des ensembles : $\text{Card}(B \cap \overline{C \cup A}) = 45 - 20 - 15 + 8 = 18$ et $\text{Card}(C \cap \overline{A \cup B}) = 42 - 25 - 15 + 8 = 10$.

Recherchons à présent le nombre d'étudiants apprenant l'anglais et l'italien mais pas l'espagnol. Cet ensemble est $A \cap B \cap \overline{C}$. Ainsi, considérons la partition $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap B$. Nous avons alors : $\text{Card}(A \cap B \cap \overline{C}) = \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap B \cap C) = 20 - 8 = 12$. Nous obtenons par la même méthode $\text{Card}(A \cap C \cap \overline{B}) = 17$, $\text{Card}(B \cap C \cap \overline{A}) = 15 - 8 = 7$.

Nous pouvons alors compléter l'ensemble du diagramme.



Exercice 17 Retour vers la logique

Le raisonnement suivant est adapté d'un dialogue d'« Alice au pays des merveilles » :

- Mes casseroles sont les seuls objets en étain que je possède.
- Je trouve vos cadeaux très utiles.
- Aucune de mes casseroles ne présente la moindre utilité.
- Les cadeaux que vous me faites ne sont pas en étain.

Représentez ces assertions à l'aide d'ensembles, et déduisez-en la validité du raisonnement.

Considérons les ensembles suivants :

- C l'ensemble des casseroles
-

-
- E l'ensemble des objets en étain.
 - Cad l'ensemble des cadeaux.
 - U l'ensemble des choses utiles.

Les assertions peuvent alors se traduire par :

Mes casseroles sont les seuls objets en étain que je possède : $C \subset E$.

Je trouve vos cadeaux très utiles : $Cad \subset U$

Aucune de mes casseroles ne présente la moindre utilité : $C \cap U = \emptyset$

Ainsi, nous en déduisons bien que « les cadeaux que vous me faites ne sont pas en étain », c'est-à-dire $Cad \cap E = \emptyset$.

Etain

Utiles

Casseroles

Cadeaux

3 Relations et Applications

3.1 Introduction

Nous avons précédemment rencontré la notion de paires $\{a, b\}$ d'éléments, qui n'étaient pas ordonnées $\{a, b\} = \{b, a\}$. Une *paire ordonnée* (a, b) d'éléments est la donnée de deux éléments, un premier (a) et un second (b) . Ainsi, $(a, b) \neq (b, a)$ à moins que $a = b$.

Soient A et B deux ensembles. Le *produit cartésien* de A et B , noté $A \times B$, est l'ensemble des paires ordonnées (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. On note généralement A^2 le produit $A \times A$.

3.2 Relation

Exercice 18 *Relation entre deux ensembles*

Une **relation** $\mathcal{R}$ entre les éléments x de E et y de F est la donnée d'une partie de $E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$. Si $x \in E$ et $y \in F$ sont en relation par $\mathcal{R}$, on note $x\mathcal{R}y$ ou encore $\mathcal{R}(x, y)$.

1. Donnez les relations définies, sur $E = F = \{1, 2, \dots, 6\}$ par :

a. $(x\mathcal{R}_1y) \iff x + y = 6$.

b. $(x\mathcal{R}_2y) \iff x = y$.

c. $(x\mathcal{R}_3y) \iff x$ divise y .

2. A présent, $E = \{1, 2, \dots, 6\}$ et $F = \{\text{un, deux, trois, quatre, cinq, six}\}$. Définissez la relation $\mathcal{R}$ suivante sur $E \times F : x\mathcal{R}y$ si y contient x lettres.

1.a. $(x\mathcal{R}_1y) \iff x + y = 6$.
 $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.

1.b. $(x\mathcal{R}_2y) \iff x = y$.
 $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

1.c. $(x\mathcal{R}_3y) \iff x$ divise y .
 $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

2. A présent, $E = \{1, 2, \dots, 6\}$ et $F = \{\text{un, deux, trois, quatre, cinq, six}\}$. $x\mathcal{R}y$ si y contient x lettres. $\{(2, \text{un}), (4, \text{deux}), (5, \text{trois}), (6, \text{quatre}), (4, \text{cinq}), (3, \text{six})\}$.

Exercice 19 *Éléments de théorie des relations*

Une relation $\mathcal{R}$ sur les éléments d'un même ensemble E est dite :

- **réflexive** si, pour tout $x \in E$, $\mathcal{R}(x, x)$.
- **symétrique** si, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- **antisymétrique** si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.
- **transitive** si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

1. Quelles sont les propriétés des relations entre nombres entiers suivantes :

- a. $x\mathcal{R}_1y \iff x$ divise y .
- b. $x\mathcal{R}_2y$ si $x - y$ est divisible par 2.
- c. $x\mathcal{R}_3y$ si $x \leq y$.
- d. $x\mathcal{R}_4y$ si $x = y$.
- e. $x\mathcal{R}_5y$ si x et y ont même ensemble de diviseurs premiers (par exemple, 20 à pour ensemble de diviseurs premiers $\{2, 5\}$).

Une relation est une **relation d'équivalence** si elle est réflexive, symétrique et transitive. Une relation est une **relation d'ordre** si elle est réflexive, antisymétrique et transitive. Les relations précédentes étaient-elles d'équivalence ?, d'ordre ?

a. $x\mathcal{R}_1y \Leftrightarrow x$ divise y .

Cette relation est réflexive, non symétrique (2 divise 6 mais 6 ne divise pas 2), et transitive (si a divise b et b divise c , alors a divise c).

b. $x\mathcal{R}_2y$ si $x - y$ est divisible par 2.

Cette relation est réflexive, symétrique et transitive ; c'est donc une relation d'équivalence.

c. $x\mathcal{R}_3y$ si $x \leq y$.

Cette relation est réflexive, antisymétrique et transitive. C'est donc une relation d'ordre.

d. $x\mathcal{R}_4y$ si $x = y$.

Cette relation est réflexive, symétrique et transitive. C'est donc une relation d'équivalence.

e. $x\mathcal{R}_5y$ si x et y ont même ensemble de diviseurs premiers.

Cette relation est réflexive, symétrique et transitive ; c'est donc une relation d'équivalence.

3.3 Fonctions

Exercice 20 Fonction ou application

Une **fonction** de A dans B est la donnée, pour tout élément de A , d'un élément de B . L'élément lié à $a \in A$ par la fonction f est noté $f(a)$, et est dit image de a par f .

Les applications suivantes sont-elles des fonctions ?

1. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $f_1(x) = \{y : y \text{ divise } x\}$.

2. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$; $f_2(x) = \{y : y = 2x + 3\}$.

3. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$; $f_3(x) = \{y \in \mathbb{R} : y^2 = x\}$.

4. $A = \{\text{étudiants}\}$, $B = \mathcal{N}$; à chaque étudiant de la classe, on attribue son âge.

5. $A = \{\text{enseignants}\}$, $B = \{\text{étudiants}\}$; à chaque enseignant de l'IUP, on attribue ses étudiants.

1. $x \in \mathbb{N}$, $f_1(x) = \{y : y \text{ divise } x\}$.

Cette application est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ puisqu'elle associe à x l'ensemble de ses diviseurs qui est donc une partie de $\mathbb{N}$.

2. $x \in \mathbb{N}$, $f_2(x) = \{y : y = 2x + 3\}$.

C'est bien une fonction, plus communément notée $f(x) = 2x + 3$.

3. $x \in \mathbb{R}_+$, $f_3(x) = \{y \in \mathbb{R} : y^2 = x\}$.

Ce n'est pas une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ puisqu'elle associe à un réel x deux valeurs ($\sqrt{x}$ et $-\sqrt{x}$).

4. A chaque étudiant de la classe, on attribue son âge.

C'est bien une fonction puisque chaque étudiant a un unique âge.

5. A chaque enseignant de l'IUP, on attribue ses étudiants.

Ce n'est pas une fonction puisqu'un enseignant a plusieurs étudiants (a priori !). Notez que si l'on associe à un enseignant l'ensemble de ses étudiants (a valeur dans $\mathcal{P}(B)$), cela devient alors une fonction.

Exercice 21 Propriété des applications

Une fonction f de A dans B est dite **injective** si les différents éléments de A ont des images distinctes.

Une fonction f de A dans B est dite **surjective** si chaque élément de B est l'image d'un élément de A .

1. Ecrivez les propriétés précédentes à l'aide de propositions logiques.

2. Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ? injectives ?

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$.

b. $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin(x)$.

c. A chaque individu d'une classe, on attribue son âge.

d. A chaque pays, on attribue la latitude et la longitude de sa capitale.

e. A chaque livre, on attribue le nom de son premier auteur.

1. *Injectivité* : Une fonction $f : A \rightarrow B$ est injective si :

$$\forall (a, a') \in A^2, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

Surjectivité : La fonction $f : A \rightarrow B$ est surjective si :

$$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b.$$

2.a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$.

Cette fonction est surjective puisque tout réel positif admet une racine carrée, mais n'est pas injective, par exemple car $f(2) = f(-2) = 4$.

2.b. $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin(x)$.

Cette fonction est surjective car tout élément de $[-1, 1]$ va admettre un antécédent par la fonction $\sin(x)$, mais n'est pas injective puisque cette fonction est 2π -périodique.

2.c. A chaque individu d'une classe, on attribue son âge.

Déjà, il faut définir l'ensemble de départ (l'ensemble des étudiants d'une classe) et l'ensemble d'arrivée, par exemple $[20, 27]$. Cette fonction n'est ni injective (il se peut que deux étudiants aient même âge) ni surjective (il se peut qu'aucun étudiant n'ait 24 ans).

2.d. A chaque pays, on attribue la latitude et la longitude de sa capitale.

Il s'agit d'une fonction de l'ensemble des pays dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cette fonction est injective (deux capitales étant différentes) mais non surjective (il n'y a pas de capitale pour tout couple longitude / latitude).

e. A chaque livre, on attribue le nom de son premier auteur.

Il s'agit d'une fonction de l'ensemble des livres dans l'ensemble des noms d'auteurs. Elle n'est pas injective, un auteur pouvant avoir écrit plusieurs livres (et donc à deux livres différents, on associe un même nom), mais est surjective (un auteur étant une personne ayant écrit au moins un livre).

Exercice 22 Composition de fonctions

Si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ sont deux fonctions, on définit la fonction $g \circ f : A \rightarrow C$ par : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

On considère les fonctions $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$ définies ci-dessous :

A	B	C	D
x	a	1	α
y	b	2	β
z		3	γ
t	c	4	ε

1. Ces fonctions sont-elles injectives ? Surjectives ?
2. Définissez les fonctions composées $k = g \circ f$ et $l = h \circ g$?
3. Les fonctions k et l sont-elles injectives ? surjectives ?

1. La fonction $f : A \rightarrow B$ n'est ni injective ($f(x) = f(y)$), ni surjective (b n'a pas d'antécédent).
 La fonction $g : B \rightarrow C$ est injective mais pas surjective (3 n'a pas d'antécédent).
 La fonction $h : C \rightarrow D$ est injective et surjective.
 2. $k = g \circ f : A \rightarrow C$ est la fonction définie par : $k(x) = k(y) = 2$, $k(z) = k(t) = 4$. Cette fonction n'est ni injective, ni surjective.
 $l = h \circ g : B \rightarrow D$ est la fonction définie par : $l(a) = \varepsilon$, $l(b) = \gamma$ et $l(c) = \beta$. Cette fonction est injective mais non surjective (α n'a pas d'antécédent).

Exercice 23 *Injective ou surjective ?*

Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f : x \rightarrow 2x$, et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g : x \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$

1. Les applications f et g sont-elles injectives et / ou surjectives ?
2. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles injectives ? Surjectives ?

1. f est une fonction injective mais non surjective (aucun nombre impair n'a d'antécédent par f). La fonction g n'est pas injective ($f(1) = f(2) = 1$), mais est surjective, tout entier n ayant au moins $2n$ pour antécédent.
 2. Fonction $f \circ g$: Soit x un entier. Si x est pair, alors $g(x) = x/2$ et $f \circ g(x) = x$. Si x est impair, alors $g(x) = \frac{x+1}{2}$ et $f \circ g(x) = x + 1$.
 Fonction $g \circ f$: Soit x un entier. $f(x) = 2x$, et donc $g \circ f(x) = x$, donc $g \circ f$ est l'identité.
 3. La fonction $f \circ g$ n'est ni injective ($f \circ g(1) = f \circ g(2) = 2$), ni surjective (1 n'a pas d'antécédent), alors que la fonction $g \circ f$ est à la fois injective et surjective.

Exercice 24 *Injection, surjection et composition version théorique*

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
 2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
-

-
3. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
 4. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
 5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
 6. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
 7. Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer qu'une fonction f strictement croissante de E dans F est injective.
-

1. Supposons que f et g soient des fonctions injectives. Soient x et y deux éléments différents de E . Alors, par injectivité de $f : E \rightarrow F$, $f(x) \neq f(y)$. La fonction $g : F \rightarrow G$ étant injective, on en déduit alors que $g(f(x)) \neq g(f(y))$, et ainsi, nous en déduisons l'injectivité de la fonction $g \circ f$.

2. Supposons à présent que f et g soient des fonction surjectives, et soit z un élément de G . Puisque $g : F \rightarrow G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$. Puisque $f : E \rightarrow F$ est surjective, y admet un antécédent par f , c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, nous en déduisons que $g(f(x)) = z$, soit $(g \circ f)(x) = z$, et donc $g \circ f$ est une fonction surjective.

3. Supposons que $g \circ f$ soit une fonction surjective. Ainsi, pour tout $z \in G$, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$, soit $g(f(x)) = z$. Posons $y = f(x)$ élément de F . Ainsi, il existe y tel que $g(y) = z$, et la fonction g est bien surjective.

4. Supposons à présent que $g \circ f$ soit injective. Soient x et x' éléments de E tels que $x \neq x'$. La fonction $g \circ f$ étant injective, nous en déduisons que $g(f(x)) \neq g(f(x'))$. Ainsi, $f(x) \neq f(x')$ (dans le cas contraire, nous aurions nécessairement $g(f(x)) = g(f(x'))$). Ainsi, la fonction f est injective.

5. Supposons que $g \circ f$ soit surjective et que g soit injective. Soit $y \in F$; nous devons montrer que y admet un antécédent x par f . Considérons l'élément $g(y)$ appartenant à l'ensemble G . La fonction $g \circ f$ étant injective (de E dans G), il existe alors un élément x de E tel que $g(f(x)) = g(y)$. A présent, supposons par l'absurde que y et $f(x)$ soient différents. Alors, par injectivité de la fonction g , $g(y) \neq g(f(x))$, ce qui est absurde par définition de $f(x)$. Ainsi, $y = f(x)$, et nous en déduisons que tout élément y de F admet un antécédent par g ; la fonction g est donc surjective.

6. Supposons que la fonction $g \circ f$ est injective et que la fonction f est surjective. Nous devons prouver l'injectivité de la fonction g : considérons deux éléments différents y et y' de F et montrons que $g(y) \neq g(y')$. La fonction f étant surjective, il existe x et x' dans E tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. De plus, puisque $y \neq y'$, nous en déduisons que $x \neq x'$. La fonction $g \circ f$ étant injective, nous en déduisons $g(f(x)) \neq g(f(x'))$, soit encore, par définition de x et x' , $g(y) \neq g(y')$. Ainsi, nous concluons à l'injectivité de la fonction g .

7. Soit f une fonction strictement croissante de E dans F , et soit x et x' deux réels distincts de E . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x < x'$. Ainsi, $f(x) < f(x')$, et donc $f(x) \neq f(x')$. La fonction f est donc injective.

Exercice 25 Bijection

Une fonction f de E dans F est dite **inversible** s'il existe une fonction g de F dans E telle que, pour tout $x \in E$, $(g \circ f)(x) = x$ et pour tout $y \in F$, $(f \circ g)(y) = y$. La fonction g est alors l'inverse de f , notée f^{-1} .

La fonction $f : E \rightarrow F$ est une **bijection** si f est à la fois injective et surjective. La fonction f est inversible si et seulement si c'est une bijection.

Les fonctions suivantes sont-elles des bijections ? Si oui, donnez la fonction inverse.

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$.
 2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$.
 3. $f_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+; x \mapsto x^2$.
 4. $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 + 1$.
-

-
5. $f_5 : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), A \rightarrow \overline{A} \ (E \neq \emptyset).$
 6. $f_6 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \rightarrow (2x + y, x - y).$
-

1. La fonction f_1 est une bijection. En effet, considérons la fonction $g : x \rightarrow \frac{x-1}{2}$. Alors $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\frac{x-1}{2}) = 2\frac{x-1}{2} + 1 = x$. De même, $f \circ g(x) = x$. On en déduit alors que la fonction g est l'inverse de la fonction f , qui est donc une bijection.

2. Cette fonction n'est pas injective puisque $f_2(-2) = f_2(2) = 4$. Ainsi, f_2 n'est pas une fonction bijective.

3. La fonction f_3 est la restriction de la fonction f_2 à l'ensemble $\mathbb{R}_+$. Sur cet ensemble, cette fonction est strictement croissante, donc injective (c.f. le 7. de l'exercice 24). De plus, elle est surjective puisque tout réel positif admet une racine carrée; ainsi, f_3 est bien une bijection. L'inverse de cette fonction est la fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$.

4. Cette fonction est injective car strictement croissante et surjective car l'antécédent de y est $x = y^{1/3} - 1$. Ainsi, f_4 est une bijection. La fonction inverse est la fonction $g : x \rightarrow (x - 1)^{1/3}$.

5. Cette fonction est bien injective; en effet, considérons A et B , deux parties différentes de E . Ainsi, il existe un élément x contenu dans l'une mais non dans l'autre; sans perte de généralité, nous pouvons supposer $x \in A$ et $x \notin B$. Ainsi, $x \notin \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$, impliquant $\overline{A} \neq \overline{B}$. Cette fonction est aussi surjective : soit A une partie de E . Puisque $\overline{\overline{A}} = A$, nous en déduisons que $f_5(\overline{A}) = A$. Ainsi, cette fonction est bien une bijection, dont l'inverse est elle-même (i.e. $f_5 \circ f_5 = Id$).

6. Soient (x, y) et (x', y') deux éléments distincts de $\mathbb{R}^2$. Supposons par l'absurde que $2x + y = 2x' + y'$ et $x - y = x' - y'$. En résolvant ce système, nous obtenons $x = x'$ et $y = y'$, ce qui est absurde. Ainsi, $f_6((x, y)) \neq f_6((x', y'))$, et donc la fonction f_6 est injective.

Soit maintenant le couple (a, b) , un élément de $\mathbb{R}^2$. Alors, $f_6((\frac{a+b}{3}, \frac{a-2b}{3})) = (a, b)$, donc f_6 est une fonction surjective.

Enfin, on vérifie que la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (\frac{x+y}{3}, \frac{a-2b}{3})$ est l'inverse de la fonction f_6 .

3.4 Image directe, image réciproque

Exercice 26 Définition et application

Soit $f : E \rightarrow F$ une application et A une partie de E . L'**image directe** de A par f , notée $f(A)$, est l'ensemble des images des éléments de A par F .

Si B est une partie de F , l'**image réciproque** de B par F , notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f appartient à B .

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x + 2. A = [2, 4]$ et $B = [1, 2]$. Qu'est-ce-que $f_1(A)$? $f_1^{-1}(B)$?
 2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2. A = [2, 4]$ et $B = [1, 2]$. Qu'est ce que $f_2(A)$? $f_2^{-1}(B)$?
 3. Qu'est ce que $f_1^{-1}(f_1(A))$? Même question pour $f_2(f_2^{-1}(B))$.
-

1. $f_1(A) = [4, 6], f_1^{-1}(B) = [0, 1]$.
 2. $f_2(A) = [4, 16], f_2^{-1}(B) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$.
 3. $f_1^{-1}(f_1(A)) = f_1^{-1}([4, 6]) = [2, 4]. f_2(f_2^{-1}(B)) = f_2([- \sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]) = [1, 2]$.
-

Exercice 27 Propriétés des images directes et réciproques

Soit $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F . Soient A et A' deux parties de E et B et B' deux parties de F .

1. Montrer que si $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$.
 2. Montrer que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$. Qu'obtient-on si f est injective ?
-

-
3. Montrer que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
 4. Montrer que $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
 5. Montrer que $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
 6. Montrer que $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.
 7. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. A quelle condition sur f obtient-on l'inclusion réciproque ?
 8. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. A quelle condition sur f obtient-on l'inclusion réciproque ?

1. Soit $y \in f(A)$; ainsi, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or, $A \subset A'$, donc $x \in A'$ et $y \in A'$, d'où $f(A) \subset f(A')$.

2. Soit $y \in f(A \cap A')$; ainsi, il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$ et de même, puisque $x \in A'$, $y = f(x) \in f(A')$. Finalement, nous en déduisons bien que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

Si f est injective, nous obtenons l'égalité entre les deux ensembles. En effet, soit $y \in f(A) \cap f(A')$. Il existe donc $x \in A$ tel que $y = f(x)$ et il existe $x' \in A'$ tel que $y = f(x')$. La fonction f étant injective, nous en déduisons que $x = x'$ (l'hypothèse inverse conduisant à $f(x) \neq f(x')$ qui est absurde). Ainsi, $x \in A \cap A'$, et nous en déduisons $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$.

3. Pour montrer l'égalité entre ces deux ensembles, nous devons montrer une double inclusion. Soit $y \in f(A \cup A')$; ainsi, il existe $x \in A \cup A'$ tel que $f(x) = y$, et il s'ensuit $y = f(x) \in f(A) \cup f(A')$. Ainsi, $f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$.

Réciproquement, considérons un élément $y = f(x)$ de $f(A)$ (avec $x \in A$). Puisque $A \subset A \cup A'$, nous en déduisons que $x \in A \cup A'$, et donc $f(x) \in f(A \cup A')$. Par symétrie des indices A et A' , nous obtenons $f(A') \subset f(A \cup A')$, et donc $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$.

4. Soit $x \in f^{-1}(B \cup B')$. Ainsi, il existe $y \in B \cup B'$ tel que $f(x) = y$. Si $y \in B$, alors $x \in f^{-1}(B)$; sinon, $y \in B'$ et alors $x \in f^{-1}(B')$. Il s'ensuit donc que $f^{-1}(B \cup B') \subset f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

Réciproquement, considérons $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi, il existe $y \in B$ tel que $f(x) = y$. Or, comme $B \subset B \cup B'$, nous en déduisons que $x \in f^{-1}(B)$, soit $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B \cup B')$. En remplaçant B par B' , nous obtenons $f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B \cup B')$, et donc $f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B \cup B')$.

5. et 6. Même technique que 4.

7. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$, et donc $x \in f^{-1}(f(A))$.

Nous devons étudier le cas où $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Ainsi, il existe $y \in f(A)$ tel que $f(x) = y$. Et, puisque $y \in f(A)$, il existe $x' \in A$ tel que $f(x') = y$. Nous constatons alors que si f est injective, $x = x'$ (car sinon, $x \neq x'$ implique $f(x) \neq f(x')$, ce qui est absurde puisque $f(x) = f(x') = y$). Ainsi, si f est injective, $x = x' \in A$, et donc, dans ce cas, nous avons l'inclusion réciproque $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

8. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Ainsi, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in f^{-1}(B)$, il existe $y' \in B$ tel que $f(x) = y'$, soit $f(x) \in B$. Ainsi, puisque $y = f(x)$, nous en déduisons $y \in B$, et donc $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Nous recherchons l'inclusion réciproque ; supposons donc $B \subset f(f^{-1}(B))$. Ainsi, si $y \in B$, $y \in f(f^{-1}(B))$, donc il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $f(x) = y$: la fonction f doit donc être surjective. Enfin, on montre que si f est surjective, alors cette inclusion est vérifiée.

4 Calcul des prédicats

4.1 Introduction

Certaines inférences échappent au modèle du calcul propositionnel vu précédemment. Par exemple, considérons le raisonnement suivant :

- Tous les hommes sont mortels.
- Socrate est un homme
- donc Socrate est mortel.

Ce type de raisonnement ne peut se vérifier dans le seul cadre du calcul propositionnel (pour lequel les trois assertions seraient trois propositions différentes pouvant prendre des valeurs de vérité de manières indépendantes). En terme ensembliste, Platon appartient à l'ensemble des hommes, qui est un sous-ensemble de l'ensemble des mortels, donc Platon est un élément de l'ensemble des mortels. L'inférence est donc correcte.

Pour capter ces inférences du langage naturel, intuitivement perçues comme vraies, on introduit la notion de *prédicat*, qui exprime la propriété qu'un élément appartenant à un certain univers peut, ou non, posséder. De même, on introduit aussi deux *quantificateurs*, le premier d'existence ($\exists$) et le second dit universel ($\forall$).

4.2 Lexique

On retrouve la notion de proposition bien formée, mais cette fois-ci, les propositions utilisent les symboles des ensembles suivants :

- un ensemble dénombrable de *variables individuelles* ($x, y, z, \dots$).
- un ensemble dénombrable de *constantes d'individus* ($a, b, c, \dots$).
- un ensemble dénombrable de *variables propositionnelles* ($p, q, r, \dots$).
- un ensemble dénombrable de *prédicats* unaires ($r^{1,0}, r^{1,1}, \dots$), binaires ($r^{2,0}, r^{2,1}, \dots$), ... n -aire ($r^{n,0}, r^{n,1}, \dots$).
- un ensemble dénombrable de *fonctions* unaire, binaire, n -aire
- les *connecteurs logiques* $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
- les *quantificateurs* $\{\forall x, \exists x, \forall y, \dots\}$.
- les *parenthèses*

Exercice 28 Exemple de modèle

Un **modèle** est la donnée d'un ensemble (ou domaine) auquel on fait correspondre les symboles de constantes d'individus avec les éléments du domaine, les prédicats correspondent aux relations sur le domaine et les fonctions correspondent aux fonctions du domaine.

1. On considère alors la syntaxe dont $\{a, b, c\}$ sont les constantes, L est un prédicat unaire et $\{P, Q\}$ sont les prédicats binaires. Nous avons les assertions suivantes :

- $\forall x, L(x)$
- $P(a, b), P(a, c)$
- $Q(b, c)$

Les ensembles suivants sont-ils des modèles de la précédente syntaxe ?

$M_1 = \{\text{Sandrine}, \text{Sabine}, \text{Emma}\}$ avec les relations : Sabine est la mère de Sandrine et Emma, qui sont donc soeurs.

$M_2 = M_1 = \{\text{Sandrine}, \text{Sabine}, \text{Emma}\}$ avec les relations : Sabine est la mère de Sandrine qui est la mère d'Emma, et donc Sabine est la grand-mère d'Emma.

Le modèle étendu $M[x|a]$ est le modèle obtenu, partant du modèle M , en associant la variable x à l'élément $a \in M$.

$$M \models \forall x, P \text{ si } M[a|x] \models P, \text{ pour tout élément } a \text{ de } M.$$

$$\models \exists x, P \text{ si } M[a|x] \models P, \text{ pour un élément } a \text{ de } M.$$

M_1 est bien un modèle ; on fait correspondre aux symboles de constantes les éléments de M_1 de la façon suivante : $a \rightarrow \text{Sabine}$, $b \rightarrow \text{Sandrine}$ et $c \rightarrow \text{Emma}$. Nous faisons correspondre au prédicat unaire L le fait que Sabine, Sandrine et Emma soient des femmes. Nous faisons correspondre au prédicat binaire $P(x, y)$ le fait que x est la mère de y (ici, Sabine est bien la mère de Sabine et Emma), et au prédicat binaire $Q(x, y)$ le fait que x est la soeur de y (ici, Emma et Sandrine sont soeurs).

M_2 n'est pas un modèle puisque si $P(x, y)$ correspond au fait que x est la mère de y , alors $P(a, c)$ est faux.

Exercice 29 Thème

Ecrire les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs :

1. On peut toujours trouver un rationnel compris entre deux rationnels donnés.
 2. Il n'existe pas d'entier supérieur à tous les autres.
 3. Si la somme de deux entiers naturels est nulle, alors ces deux entiers sont nuls.
 4. Etant donné un réel quelconque, il existe des réels qui lui sont strictement supérieurs.
-

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{Q}, x \leq r \leq y$ ou $y \leq r \leq x$.
 2. $\neq (\exists z \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq z)$.
 3. $\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$.
 4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$.
-

Exercice 30 Version

Dans les assertions suivantes, a, b et c désignent des entiers naturels. Traduisez ces assertions en langue naturelle et précisez, pour chacune d'elle, si elle est vraie ou fausse.

1. $\forall a, \exists b, \exists c, a = bc$
 2. $\forall b, \forall c, \exists a, a = bc$
 3. $\exists a, \exists b, \exists c, a = bc$
 4. $\exists b, \forall a, \exists c, a = bc$.
-

1. Pour tout entier a , il existe des entiers b et c tels que $a = bc$
 2. Pour tout entier b et c , il existe un entier a tel que $a = bc$
 3. Il existe des entiers a, b et c tels que $a = bc$
 4. Il existe un entier b tel que, pour tout entier a , il existe un entier c vérifiant $a = bc$ (pour cette propriété, pensez à $b = 1$, et ainsi $a = c$).
-

Exercice 31 Comment quantifier l'amour ?

Dans cet exercice, nous considérons qu'« aimer » est une relation binaire (non nécessairement symétrique). On note $\text{Aime}(x, y)$ si la personne x aime la personne y .

Représentez, à l'aide de propositions logiques, les phrases suivantes :

1. Quelqu'un aime Valentine.
 2. Personne n'aime Quentin.
 3. Toute personne aime quelqu'un.
 4. Quelqu'un est aimé de tous.
-

-
5. *Toute personne s'aime.*
 6. *Il n'y a personne qui ne s'aime pas lui-même.*

Les deux propositions suivantes sont-elles équivalentes ?

$(\exists x, \text{Aime}(x, \text{Caroline})) \wedge (\exists x, \text{Aime}(\text{Caroline}, x)).$

$\exists x, (\text{Aime}(x, \text{Caroline}) \wedge \text{Aime}(\text{Caroline}, x)).$

-
1. $\exists x, \text{Aime}(x, \text{Valentine}).$
 2. $\neg(\forall x, \text{Aime}(x, \text{Quentin})).$
 3. $\forall x, \exists y, \text{Aime}(x, y).$
 4. $\exists x, \forall y, \text{Aime}(y, x).$
 5. $\forall x, \text{Aime}(x, x).$
 6. $\neg(\exists x, \neg \text{Aime}(x, x)).$

Les deux propositions ne sont pas équivalentes; dans la première, les deux symboles « x » ne désignent pas la même personne; il serait ainsi moins ambigu d'écrire $(\exists x, \text{Aime}(x, \text{Caroline})) \wedge (\exists y, \text{Aime}(\text{Caroline}, y))$. Dans la seconde assertion, les deux symboles x représentent la même personne (i.e. cette personne aime Caroline et en retour, Caroline l'aime). Ainsi, ces deux assertions ne sont pas équivalentes.

Exercice 32 Exemple de relation

Dans cet exercice, P désigne un ensemble de personnes et A un ensemble d'activités. On considère les relations suivantes :

- $\text{faire}(x, a)$ signifie que la personne x fait l'activité a .
- $\text{necessite}(a, b)$ signifie que l'activité a nécessite, avant d'être faite, que l'activité b soit faite.
- $\text{competent}(x, a)$ signifie que la personne x peut faire l'activité a .

Traduisez en langage logique les assertions suivantes :

1. *Toute activité doit être réalisée par quelqu'un de compétent pour cette activité.*
2. *Franck est compétent pour toutes les activités.*
3. *Cette activité est tellement simple que tout le monde est compétent pour la réaliser.*
4. *Il faut réaliser toutes les activités prérequisées par l'activité Decoration avant de réaliser celle-ci.*
5. *Toute personne est compétente dans au moins une activité.*
6. *Toute activité dispose au moins d'une personne compétente.*
7. *Les activités pour lesquelles Anna est compétente ont toutes au moins un prérequis.*

1. « Toute activité doit être réalisée par quelqu'un de compétent pour cette activité » doit être réécrite en : « si p réalise l'activité a , alors p est compétent pour a , soit : $\forall p \in P, \forall a \in A, \text{Faire}(p, a) \Rightarrow \text{competent}(p, a).$

2. $\forall a \in A, \text{competent}(\text{Franck}, a).$
 3. $\exists a \in A, \forall p \in P, \text{Competent}(p, a).$
 4. $\forall a \in A, \text{necessite}(\text{Decoration}, a) \Rightarrow \exists p \in P, \text{Faire}(p, a).$
 5. $\forall p \in P, \exists a \in A, \text{Competent}(p, a).$
 6. $\forall a \in A, \exists p \in P, \text{Competent}(p, a).$
 7. $\forall a \in A, \text{Competent}(\text{Anna}, a) \Rightarrow \exists a' \in A, \text{Necessite}(a, a').$
-

Exercice 33 *Hein ???*

Soit I un ensemble fini. Qu'est Q pour I ?

$$(\forall q \in Q, q \subset I) \wedge (\forall i \in I, \exists q \in Q, i \in q) \wedge (\forall q \in Q, \forall q' \in Q, (q \cap q' = \emptyset \Leftrightarrow q \neq q')).$$

-
- $(\forall q \in Q, q \subset I)$ signifie que q est une partie de I (et non un élément de I).
 - $(\forall i \in I, \exists q \in Q, i \in q)$ signifie que tout élément i de I appartient à une partie de I appartenant à Q .
 - $(\forall q \in Q, \forall q' \in Q, (q \cap q' = \emptyset \Leftrightarrow q \neq q'))$ signifie que si deux parties de Q ont un élément en commun (intersection non vide), alors elles sont égales.

Finalement, nous en déduisons que Q est une partition de I .

4.3 Mise sous une forme standardisée

Exercice 34 *Forme prénexe*

Une formule est en **forme prénexe** si elle ne contient aucun quantificateur ou si elle est de la forme

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n A$$

avec pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ et où A est une formule sans quantificateur.

Donnez la forme prénexe des propositions suivantes :

1. $\neg \exists x, P(x)$
2. $\neg \forall x, P(x)$
3. $(\neg \forall x, P(x)) \rightarrow \forall y, Q(y)$ (Notez bien que dans la forme prénexe, le symbole $\rightarrow$ n'apparaît pas!).
4. $\forall x(\forall y Q(x, y) \rightarrow P(x))$.

1. $\neg \exists x, P(x)$ a pour forme prénexe : $\forall x, \neg P(x)$. En langage naturel, la proposition initiale signifie qu'il est faux qu'il existe x tel que $P(x)$, donc pour tout x , $\neg P(x)$.

2. $\neg \forall x, P(x)$ a pour forme prénexe : $\exists x, \neg P(x)$.

3. Pour cette formule, il faut déjà éliminer le symbole $\rightarrow$, ce qui se fait par passage à la forme normale conjonctive ou disjonctive. $(\neg \forall x, P(x)) \rightarrow \forall y, Q(y)$ est logiquement équivalent à $[\neg(\neg \exists x, P(x))] \vee [\forall y, Q(y)]$, soit à $\exists x, \forall y, P(x) \vee Q(y)$. Notez bien que dans l'ensemble de ces expressions, la variable y dépend de la variable x .

4. $\forall x(\forall y, Q(x, y) \rightarrow P(x))$ est logiquement équivalente à $\forall x, \neg(\forall y, Q(x, y)) \vee P(x)$, soit $\forall x, \exists y, (\neg Q(x, y)) \vee P(x)$, qui a pour forme prénexe : $\neg Q(x, f(x)) \vee P(x)$ où f est le symbole d'une fonction unaire.

Exercice 35 *Skolémisation*

On considère ici une proposition mise sous forme prénexe. Sa **Skolémisation** consiste à supprimer les quantificateurs présents dans la formule de la façon suivante : on considère le quantificateur le plus profond dans la formule

- si c'est un quantificateur universel, on le supprime (et transformons la variable quantifiée en variable libre)
- si c'est un quantificateur existentiel, on le supprime et on remplace toutes les occurrences de la variable quantifiée par une fonction dépendant de toutes les variables quantifiées universellement qui précèdent. Une telle fonction est dite **fonction de Skolem**.

Mettre sous forme de Skolem les expressions suivantes :

1. $\forall x, P(x)$
2. $\forall x, \exists y, P(x, y)$.
3. $\exists y, \forall x, P(x, y)$.
4. $\forall x, \forall y, P(x, y)$.
5. $\forall x, \exists y, \forall z, Q(x, y, z)$.
6. $\forall x, \forall y, \exists z, Q(x, z, y)$.
7. $\forall x, \exists y, \forall z, \exists t, R(x, y, z, t)$

Indication : Réponse 7. $R(x, g(x), z, f(x, z))$

8. $\forall x, (\forall y, Q(x, y) \rightarrow P(x))$.

-
1. $\forall x, P(x)$ a pour forme de Skolem $P(x)$.
 2. $\forall x, \exists y, P(x, y)$ a pour forme de Skolem $P(x, f(x))$ où f est le symbole d'une fonction.
 3. $\exists y, \forall x, P(x, y)$ a pour forme de Skolem $P(x, a)$ où a est le symbole d'une constante.
 4. $\forall x, \forall y, P(x, y)$ a pour forme de Skolem $P(x, y)$.
 5. $\forall x, \exists y, \forall z, Q(x, y, z)$ a pour forme de Skolem $Q(x, f(x), z)$, où f est le symbole d'une fonction.
 6. $\forall x, \forall y, \exists z, Q(x, z, y)$ a pour forme de Skolem $Q(x, f(x, y), z)$, où f est une fonction (binaire).
 7. $\forall x, \exists y, \forall z, \exists t, R(x, y, z, t)$ a pour forme de Skolem $R(x, g(x), z, f(x, z))$ où f et g sont des symboles de fonctions (respectivement binaire et unaire).
 8. Cette expression n'est pas sous forme prénexe : il faut déjà éliminer le symbole $\rightarrow$. $\forall x, (\forall y, Q(x, y) \rightarrow P(x))$ est logiquement équivalente à $\forall x, \neg(\forall y, Q(x, y)) \vee P(x)$, soit $\forall x, \exists y, Q(x, y) \vee P(x)$, qui à pour forme de Skolem $Q(x, f(x)) \vee P(x)$.
-

Exercice 36 Mise sous forme clausale

Un littéral est, soit un prédicat $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, soit la négation de ce prédicat $\neg P(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Une formule est sous forme **clausale** si elle est disjonction de littéraux (ou de clauses), c'est-à-dire si elle se présente comme disjonction de conjonctions.

Mettre sous forme clausale les formes de Skolem obtenues à l'exercice 35.

Indic : 8. $P(x) \vee \neg Q(x, f(x))$.

Toutes les formes de Skolem obtenues dans l'exercice 35 sont directement des formes clausales.

4.4 Résolution en calcul de prédicats

Il existe deux façons différentes de montrer la validité d'un raisonnement. La première est de montrer directement sa validité au moyen des méthodes du type *coupures de Gentzen*. La seconde consiste à montrer que, partant des prémisses et de la négation de la conclusion, nous obtenons une absurdité (raisonnement par *falsification*). Ces deux méthodes présentent des avantages et des inconvénients. Nous allons, dans la suite, mettre en place les principaux arguments utilisés dans la méthode de falsification.

Cette méthode consiste :

- Réécrire les prémisses sous une forme normalisée.
- Utiliser un théorème de Herbrand.

Exercice 37 Jeux d'écritures

On s'intéresse au raisonnement suivant :

P1 Un dragon est heureux si tous ses enfants peuvent voler.

P2 Les dragons verts peuvent voler.

P3 Un dragon est vert s'il a au moins un parent vert ou rose.

C Les dragons verts sont heureux.

On prend les notations suivantes : $h(x)$ pour x est heureux, $ve(x)$ pour x est vert, $ro(x)$ pour x est rose, $vo(x)$ pour x vole et $p(x, y)$ pour x est le parent de y .

1. Ecrivez les propositions en termes logiques.

2. Transformez les expressions P1, P2 et P3 obtenues en formes clauseuses. Transformez la négation de la conclusion C en forme clauseuse (conjonction de disjonctions).

3. Quelles sont les différentes clauses que vous obtenez finalement ?

Réponse : L'ensemble des clauses est :

$\{p(x_1, f(x_1)) \vee h(x_1); \neg vo(f(x_2)) \vee h(x_2); \neg ve(x_3) \vee vo(x_3);$
 $\neg p(y_1, x_4) \vee \neg ve(y_1) \vee ve(x_4); \neg p(y_2, x_5) \vee \neg ro(y_3) \vee ve(x_5); ve(a); \neg h(a)\}$

On prend les notations suivantes : $h(x)$ pour x est heureux, $ve(x)$ pour x est vert, $ro(x)$ pour x est rose, $vo(x)$ pour x vole et $p(x, y)$ pour x est le parent de y .

1.

P1 Il faut comprendre l'assertion comme « Si tous les enfants d'un dragon peuvent voler, alors ce dragon est heureux ».

$$\forall x, (\forall y, p(x, y) \rightarrow vo(y)) \rightarrow h(x).$$

P2 Il faut comprendre l'assertion comme « Si un dragon est vert, alors il peut voler ».

$$\forall x, ve(x) \rightarrow vo(x).$$

P3 Il faut comprendre l'assertion comme « Un dragon ayant l'un de ses parents rose ou vert est vert », soit encore « S'il existe un parent rose ou vert, alors le dragon est vert ».

$$\forall x, [\exists y, p(y, x) \wedge (ro(y) \vee ve(y))] \rightarrow ve(x).$$

C Doit être comprise comme « Si un dragon est vert, alors il est heureux ».

$$\forall x, ve(x) \rightarrow h(x).$$

2. P1 : $\forall x, (\forall y, p(x, y) \rightarrow vo(y)) \rightarrow h(x)$ est logiquement équivalente à $\forall x, \neg(\forall y, p(x, y) \rightarrow vo(y)) \vee h(x)$, qui est logiquement équivalente à $\forall x, \neg(\forall y, \neg p(x, y) \vee vo(y)) \vee h(x)$, qui a pour forme prénexe : $\forall x, (\exists y, p(x, y) \wedge \neg vo(y)) \vee h(x)$.

La forme de Skolem associée est $(p(x, f(x)) \wedge \neg vo(f(x))) \vee h(x)$, et la forme clauseuse est $(p(x, f(x)) \vee h(x)) \wedge (\neg vo(f(x)) \vee h(x))$. Les clauses sont alors $p(x_1, f(x_1)) \vee h(x_1)$ et $\neg vo(f(x_2)) \vee h(x_2)$.

P2 : $\forall x, ve(x) \rightarrow vo(x)$ est logiquement équivalente à $\forall x, \neg ve(x) \vee vo(x)$, qui a pour forme de Skolem $\neg ve(x) \vee vo(x)$. Ainsi, la clause ajoutée est $\neg ve(x_3) \vee vo(x_3)$.

P3 : $\forall x, [\exists y, p(y, x) \wedge (ro(y) \vee ve(y))] \rightarrow ve(x)$ est logiquement équivalente à $\forall x, \neg[\exists y, p(y, x) \wedge (ro(y) \vee ve(y))] \vee ve(x)$, de forme prénexe : $\forall x, \forall y, [\neg p(y, x) \vee (\neg ro(y) \wedge \neg ve(y))] \vee ve(x)$. Sa forme de Skolem est $[\neg p(y, x) \vee \neg ro(y) \wedge \neg ve(y)] \vee ve(x)$. Elle est logiquement équivalente à : $[(\neg p(y, x) \vee \neg ro(y)) \wedge (\neg p(y, x) \vee \neg ve(y))] \vee ve(x)$, et donc la forme clauseuse est : $(\neg p(y, x) \vee \neg ro(y) \vee ve(x)) \wedge (\neg p(y, x) \vee \neg ve(y) \vee ve(x))$. Les clauses sont alors $(\neg p(y_1, x_4) \vee \neg ro(y_1) \vee ve(x_4))$ et $\neg p(y_2, x_5) \vee \neg ve(y_2) \vee ve(x_5)$.

C la négation de la conclusion est : $\neg(\forall x, ve(x) \rightarrow h(x))$, qui est logiquement équivalent à $\neg(\forall x, \neg ve(x) \vee h(x))$, soit $\exists x, ve(x) \wedge \neg h(x)$. La forme de Skolem est $ve(a) \wedge \neg h(a)$, où a est un symbole de constante. Finalement, les clauses sont $ve(a)$ et $\neg h(a)$.

4.5 Résolution par la méthode d'unification

Remarquons que certaines expressions sont semblables. Par exemple, $\forall x, P(x)$, $\forall y, P(y)$ sont trivialement égales. De même, on peut déduire de la proposition précédente la proposition : $\forall x, \forall y, P(f(y))$, puisque $P(x)$ est vrai pour tout x , donc en particulier pour ceux de la forme $f(y)$. Cela montre l'intérêt de la substitution ; on substitue dans une expression certaines variables afin d'obtenir une autre expression. Sous forme clausale, les expressions sont : $P(x)$ et $P(f(y))$. La substitution $x \rightarrow f(y)$ est notée $\sigma = [x|f(y)]$. Nous obtenons ainsi : $P(x)\sigma = P(f(y))$.

Exercice 38 Unificateur

Les expressions E_1 et E_2 sont dites **unifiables** s'il existe une substitution σ telle que $E_1\sigma = E_2\sigma$, avec $\sigma = [x_1|t_1, \dots, x_n|t_n]$.

Trouver, s'il existe, l'unificateur des propositions suivantes :

1. $P(x)$ et $P(A)$.
2. $P(f(x), y, g(x))$ et $P(f(x), x, g(x))$.
3. $P(f(x), y, g(y))$ et $P(f(x), z, g(x))$.
4. $P(g(f(v)), g(u))$ et $P(x, y)$.
5. $P(x, f(x))$ et $P(x, x)$.

-
1. $\sigma = [x|A]$.
 2. $\sigma = [y|x]$ (ou $\sigma = [x|y]$).

Remarque On perçoit ici la notion d'unificateur *le plus général* : en effet, $\sigma = [x|A, y|A]$ est aussi un unificateur (A étant le symbole d'une constante), mais celui-ci est moins « général » que le précédent. On n'explicite pas plus longuement cette notion que nous utiliserons par la suite.

3. $\sigma = [y|x, z|x]$ (ou équivalentes).
 4. $\sigma = [x|g(f(v)); y|g(u)]$
 5. Il n'existe aucun unificateur entre ces deux propositions.
-

Soit S une formule mise sous forme clausale, et C_1, C_2 deux clauses de S . S'il existe un atome L tel que $L \in C_1$ et $\neg L \in C_2$, alors la clause

$$R \equiv (C_1 \setminus L) \vee (C_2 \setminus \{\neg L\})$$

est appelée *résolvante* de C_1 et C_2 , et est une conséquence logique de S . Ainsi, S et $S \vee R$ sont logiquement équivalentes.

Exercice 39 Le retour des dragons

On reprend les notations et résultats de l'exercice 37. Le tableau ci-dessous regroupe les clauses obtenues :

1. Quel est l'unificateur des clauses 2 et 7 ? Quelle est la résolvante des clauses 2 et 7 ? Recopiez celle-ci en ligne 8
2. Quel est l'unificateur des clauses 8 et 3 ? Déduisez-en alors la résolvante de ces clauses, et recopiez-là en ligne 9.
3. Sur le même principe, complétez le tableau afin d'obtenir une absurdité. Que concluez-vous quant-à la validité du raisonnement ?

1	$p(x_1, f(x_1)) \vee h(x_1)$	P1
2	$\neg vo(f(x_2)) \vee h(x_2)$	P1
3	$\neg ve(x_3) \vee vo(x_3)$	P2
4	$\neg p(y_1, x_4) \vee \neg ve(y_1) \vee ve(x_4)$	P3
5	$\neg p(y_2, x_5) \vee \neg r(y_3) \vee ve(x_5)$	P3
6	$ve(a)$	$\neg$ Conclusion
7	$\neg h(a)$	$\neg$ Conclusion
8		2 et 7 [x2]
9		8 et 3 [x3]
10		9 et 4 [x4]
11		10 et 1 [x1 ; y1]
12		11 et 6
13		12 et 7
14		13 et 9

1	$p(x_1, f(x_1)) \vee h(x_1)$	P1
2	$\neg vo(f(x_2)) \vee h(x_2)$	P1
3	$\neg ve(x_3) \vee vo(x_3)$	P2
4	$\neg p(y_1, x_4) \vee \neg ve(y_1) \vee ve(x_4)$	P3
5	$\neg p(y_2, x_5) \vee \neg r(y_3) \vee ve(x_5)$	P3
6	$ve(a)$	$\neg$ Conclusion
7	$\neg h(a)$	$\neg$ Conclusion
8	$\neg vo(f(a))$	2 et 7 [x2 a]
9	$\neg ve(f(a))$	8 et 3 [x3 f(a)]
10	$\neg p(y_1, f(a)) \vee \neg ve(y_1)$	9 et 4 [x4 f(a)]
11	$h(a) \vee \neg ve(a) \vee ve(f(a))$	10 et 1 [x1 a; y1 a]
12	$h(a) \vee ve(f(a))$	11 et 6
13	$ve(f(a))$	12 et 7
14	Absurde	13 et 9

Exercice 40 *Qui a tué le chat ?*

On considère la base de connaissances suivante :

- a. Luc possède un chien.

- b. Toute personne possédant un chien aime les animaux.
 c. Les personnes qui aiment les animaux ne tuent pas les animaux.
 d. Luc a tué Félix ou la curiosité a tué Félix.
 e. Félix est un chat.
 f. Tous les chats sont des animaux.

On introduit les notations suivantes : $Possede(x, y)$ si x possède y , $Chien(x)$ si x est un chien, $Chat(x)$ si x est un chat, $AimeAni(x)$ si x aime les animaux, $Animal(x)$ si x est un animal, $Tuer(x, y)$ si x a tué y .

1. Formaliser le lexique employé dans cette base de connaissances ; quelles sont les constantes d'individus, les relations, les fonctions ?
2. Modélisez le précédent raisonnement en langage des prédicats.
3. Mettez les expressions obtenues sous formes clausales afin d'obtenir l'ensemble de clauses suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Chien(Fido), Possede(Luc, Fido), \neg Possede(x, y) \vee \neg P(y) \vee AimeAni(x), \\ \neg AimeAni(x) \vee \neg A(x, y) \vee \neg Tuer(x, y), Tuer(Luc, Felix) \vee Tuer(Curiosite, Felix), \\ Chat(Felix), \neg Chat(x) \vee Animal(x) \end{array} \right\}$$

4. Conjecturer quelle pourrait être la conclusion de ce raisonnement. Mettez la négation de cette conclusion sous forme clausale.

5. Complétez le tableau suivant :

1	$Chien(Fido)$	a.
2	$Possede(Luc, Fido)$	a.
3	$\neg Possede(x, y) \vee \neg Chien(y) \vee AimeAni(x)$	b.
4	$\neg AimeAni(x) \vee \neg A(x, y) \vee \neg Tuer(x, y)$	c.
5	$Tuer(Luc, Felix) \vee Tuer(Curiosite, Felix)$	d.
6	$Chat(Felix)$	e.
7	$\neg Chat(x) \vee Animal(x)$	f.
8		$\neg Conclusion$
9	$Tuer(Luc, Felix)$	5 et 8
10		7 et 6 [x]
11		4 et 9 [x , y]
12		10 et 11
13		12 et
14		13 et
15	Absurde car :	

- a. Luc possède un chien.
 b. Toute personne possédant un chien aime les animaux.
 c. Les personnes qui aiment les animaux ne tuent pas les animaux.
 d. Luc a tué Félix ou la curiosité a tué Félix.
 e. Félix est un chat.
 f. Tous les chats sont des animaux.

On introduit les notations suivantes : $Possede(x, y)$ si x possède y , $Chien(x)$ si x est un chien, $Chat(x)$ si x est un chat, $AimeAni(x)$ si x aime les animaux, $Animal(x)$ si x est un animal, $Tuer(x, y)$ si x à tuer y .

1. Les individus sont $Felix$, Luc *Curiosite*. Les relations sont $Possede$ (binaire), $Tuer$ (binaire). $Chien$, $Chat$ et $AimeAni$ sont des prédicats unaires. Il n'y a pas de fonction.

2.

- $\exists x, Chien(x) \wedge Possede(Luc, x)$.
- $\forall x, (\forall y, Chien(y) \wedge Possede(x, y)) \rightarrow AimeAni(x)$.
- $\forall x, AimeAni(x) \rightarrow \neg(\exists y, Animal(y) \wedge Tuer(x, y))$.
- $Tuer(Luc, Felix) \vee Tuer(Curiosite, Felix)$.
- $Chat(Felix)$.
- $\forall x, Chat(x) \rightarrow Animal(x)$.

3. Les formes clausales sont :

- $Chien(Fido)$ et $Possede(Luc, Fido)$, $Fido$ étant un symbole de constante.
- $\neg Chien(y) \vee \neg Possede(x, y) \vee AimeAni(x)$.
- $\neg AimeAni(x) \vee \neg Animal(y) \vee \neg Tuer(x, y)$.
- $Tuer(Luc, Felix) \vee Tuer(Curiosite, Felix)$.
- $Chat(Felix)$.
- $\neg Chat(x) \vee Animal(x)$.

4. Il semble bien que ce soit la Curiosité qui a tué Félix. La forme clausale de la négation de cette conclusion est $\neg Tuer(Curiosite, Felix)$

1	$Chien(Fido)$	a.
2	$Possede(Luc, Fido)$	a.
3	$\neg Possede(x, y) \vee \neg Chien(y) \vee AimeAni(x)$	b.
4	$\neg AimeAni(x) \vee \neg A(x, y) \vee \neg Tuer(x, y)$	c.
5	$Tuer(Luc, Felix) \vee Tuer(Curiosite, Felix)$	d.
6	$Chat(Felix)$	e.
7	$\neg Chat(x) \vee Animal(x)$	f.
8	$\neg Tuer(Curiosite, Felix)$	$\neg$ Conclusion
9	$Tuer(Luc, Felix)$	5 et 8
10	$Animal(Felix)$	6 et 7 $[x Felix]$
11	$\neg AimeAni(Luc) \vee \neg Animal(Felix)$	4 et 9 $[x Luc, y Felix]$
12	$\neg AimeAnimal(Luc)$	10 et 11
13	$\neg Chien(y) \vee \neg Possede(Luc, y)$	12 et 3 $[x Luc]$
14	$\neg Chien(Fido)$	13 et 2 $[y Fido]$
15	Absurde car : 1 et 14	

Exercice 41 Retour sur Aristote

Reconsidérons le raisonnement :

p_1 Aristote est un homme.

p_2 Tout homme est mortel.

c Donc Aristote est mortel.

1. Traduisez en syntaxe logique le précédent raisonnement.

2. Mettez l'expression obtenue à partir de l'assertion p_2 sous forme prénexe puis de Skolem.

3. Quelle substitution faut-il alors faire pour que l'on puisse déduire la conclusion (c) des prémisses ?

-
1.
 p_1 *Homme(Aristote)*.
 p_2 $\forall x, \text{Homme}(x) \rightarrow \text{Mortel}(x)$.
 c *Mortel(Aristote)*.
 2. $\neq \text{Homme}(x) \vee \text{Mortel}(x)$ est la forme de Skolem de p_2 .
 3. L'unificateur de p_1 et p_2 est $\sigma = [x|\text{Aristote}]$.
-

Exercice 42 *Démonstration d'une tautologie*

Pour démontrer qu'une expression est une **tautologie**, il suffit de montrer que l'on dérive une contradiction de la négation de cette expression. On souhaite démontrer que

$$[(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(A)] \rightarrow Q(A).$$

1. Quelle est la forme causale de la négation de cette expression ?
 2. Utilisez la méthode d'unification sur deux clauses.
 3. En déduire que vous aboutissez à une contradiction.

1. La forme causale de la négation de l'expression est :

$$(\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge P(A) \wedge (\neg Q(A)).$$

2. On considère les clauses $\neg P(x) \vee Q(x)$ et $P(A)$. Pour $\sigma = [x|A]$, la résolvante de ces deux clauses est $Q(A)$.

3. Puisque nous avons de plus la clause $\neg Q(A)$, nous en déduisons aisément une contradiction.

Exercice 43 *On considère le raisonnement suivant :*

- *Aucun enfant de moins de douze ans n'est accepté dans cette école en tant qu'interne.*
- *Tous les enfants studieux ont les cheveux courts.*
- *Aucun externe n'apprend le grec.*
- *Seuls les élèves de moins de douze ans sont paresseux.*
- *donc les hellénistes ont les cheveux courts.*

1. Mettre ces assertions sous forme logique.
 2. Le raisonnement est-il valide ?

1. Sans détailler les notations (*Age(x)* signifie que x a plus de 12 ans, la négation de paresseux est studieux et la négation d'interne est externe), on a :

- $\forall x, \text{Interne}(x) \rightarrow \text{Age}(x)$.
 - $\forall x, \text{Studieux}(x) \rightarrow \text{Court}(x)$.
 - $\neg[\exists x, \neg \text{Interne}(x) \wedge \text{Grec}(x)]$.
 - $\forall x, \neg \text{Studieux}(x) \rightarrow \neg \text{Age}(x)$.
 - $\forall x, \text{Grec}(x) \rightarrow \text{Court}(x)$.
-

2. Nous obtenons le tableau suivant :

1	$\neg \text{Interne}(x) \vee \text{Age}(x)$	a
2	$\neg \text{Studieux}(x) \vee \text{Court}(x)$	b
3	$\text{Interne}(x) \vee \neg \text{Grec}(x)$	c
4	$\text{Studieux}(x) \vee \neg \text{Age}(x)$	d
5	$\text{Grec}(x)$	$\neg$ Conclusion
6	$\neg \text{Court}(x)$	$\neg$ Conclusion
7	$\text{Interne}(x)$	3 et 5
8	$\neg \text{Studieux}(x)$	6 et 2
9	$\text{Age}(x)$	1 et 7
10	$\text{Studieux}(x)$	4 et 9
11	Absurde car 10 et 8	

Le raisonnement est donc bien valide.

5 Bibliographie

Vous trouverez sur internet de nombreux cours, souvent sous forme de notes de cours ou de diaporamas. Pour préparer ce support de cours, je me suis inspiré des cours et supports suivants :

Cours de Stéphane Lafrance, Ecole supérieure de technologie de l'Université du Québec, LOG620.

Cours de Prolog de Jussien, ENM 2002

Cours de Logique de Denis Creissels, Université Lyon II Lumière.

Cours de Jean-Yves Antoine, de l'IUP Blois, Université François Rabelais.

Toujours sur internet, pour approfondir certaines notions, vous pouvez regarder les notes de cours de Laure Danthony ainsi que les notes de cours de Logique de Jean-Pierre Jouannaud (mais les notions abordées dans ces cours dépassent assez largement l'ambition du présent cours).

Enfin, comme références bibliographiques, mentionnons un ouvrage très accessible :

Mathématiques discrètes, de Seymour Lipshutz, de la série Shaum's, aux éditions McGraw-Hill.

Enfin, mentionnons un ouvrage en anglais : Mathematical logic, de Stephen Cole Kleene.