

Correction sujet oral 2: Géométrie analytique

Jf Culus, le 31 Mai 2016,

Plan de la présentation ... et de la vôtre

Ma présentation

- Présentation du thème
- Choix des exercices
- Correction et analyse de l'exercice
- Analyse des productions des élèves

Le jour du CAPES

- Analyse des productions des élèves
- Correction et analyse de l'exercice
- Présentation du thème
- Choix des exercices

Présentation du thème ...

- Les différents types de géométries (cycles)
- Les différentes branches de la géométrie (collège, lycée, sup ...)
- Éléments du B.O. du secondaire

Les différents types de géométries (cycles)

- Cycle 2 (CP, CE1, CE2): Géométrie perceptive
« *ce que je perçois est vrai* »
- Cycle 3 (CM1, CM2, 6ieme): Géométrie instrumentée
« *ce que je mesure est vrai* »
- Cycle 4 (5ieme, 4ieme, 3ieme): Géométrie déductive (apprentissage de la démonstration)
« *est vrai ce que je démontre* »

Les différentes types de géométries (maths)

- Géométrie classique ou d'incidence (relations entre les points / droites)
points, droites, parallélisme, concours, alignement,
- Géométrie euclidienne (distance, longueur, mesure des angles)
- Géométrie affine (vecteurs, transformations : translations ...)
- Géométrie analytique (Descartes 1596-1650) (coordonnées, passage géométrie -> algèbre)
- Géométrie euclidienne (produit scalaire-> distance, angle ...)
- ... différentielle, projective, algébrique, non euclidienne

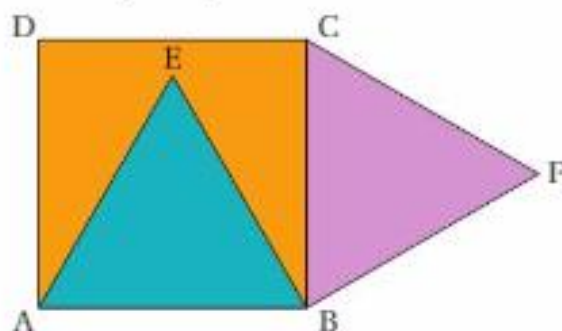
Programme de 2snd

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Vecteurs Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B. Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé. Égalité de deux vecteurs : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Somme de deux vecteurs. Produit d'un vecteur par un nombre réel. Relation de Chasles.	• Savoir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. • Connaître les coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$. • Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs dans un repère. • Utiliser la notation $\lambda \overrightarrow{u}$. • Établir la colinéarité de deux vecteurs. • Construire géométriquement la somme de deux vecteurs. • Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.	À tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu. La somme des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\overrightarrow{u}$ et de vecteur $\overrightarrow{v}$. Pour le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b) dans un repère, le vecteur $\lambda \overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda a, \lambda b)$ dans le même repère. Le vecteur $\lambda \overrightarrow{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.

Choix des exercices: 2s2d

129 Points alignés

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré. ABE et BCF sont deux triangles équilatéraux.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

- Démontrer que la hauteur des triangles équilatéraux est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- En déduire les coordonnées des points E et F.
- Démontrer que les points D, E et F sont alignés.

110 Levier

«Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde.»

ARCHIMÈDE

Le principe du levier, découvert par Archimède (287 - 212 av. J.-C.), peut être schématisé par une tige [AB] posée sur un support faisant pivot au point O.

On a posé en A un objet de masse m et en B un objet de masse m' .

Le levier est en équilibre si l'égalité suivante est vérifiée :

$$m \times OA = m' \times OB.$$



Cette condition se traduit par l'égalité vectorielle

$$m\overrightarrow{OA} + m'\overrightarrow{OB} = \vec{0}.$$

1. Dans chacun des cas suivants, réaliser une figure pour obtenir l'équilibre.

- a. $m = m'$. b. $m = 5 \text{ kg}$ et $m' = 2 \text{ kg}$. c. $m = 2m'$.

2. a. Si $m = 2 \text{ kg}$ et $m' = 3 \text{ kg}$, démontrer que :

$$\overrightarrow{OA} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}.$$

b. Si $m = 6 \text{ kg}$ et $m' = 5 \text{ kg}$, démontrer que :

$$\overrightarrow{OB} = \frac{6}{11}\overrightarrow{AB}.$$

3. Expliquer la citation d'Archimède.

1ereS

Produit scalaire dans le plan

Définition, propriétés.

- Calculer le produit scalaire de deux vecteurs par différentes méthodes :
 - projection orthogonale ;
 - analytiquement ;
 - à l'aide des normes et d'un angle ;
 - à l'aide des normes.
- Choisir la méthode la plus adaptée en vue de la résolution d'un problème.

☐ Il est intéressant de démontrer l'égalité des expressions attachées à chacune de ces méthodes.

☐ La démonstration du théorème de la médiane fournit l'occasion de travailler le calcul vectoriel en lien avec le produit scalaire.

Vecteur normal à une droite.

- Déterminer une équation cartésienne de droite connaissant un point et un vecteur normal.
 - Déterminer un vecteur normal à une droite définie par une équation cartésienne.
- ☐ Déterminer une équation de cercle défini par son centre et son rayon ou par son diamètre.

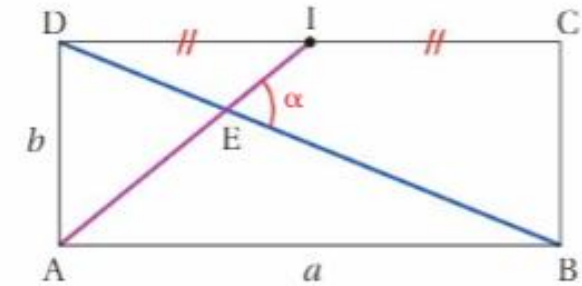
Applications du produit scalaire :
calculs d'angles et de longueurs ;
formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus.

☐ Démontrer que :
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

La relation de Chasles pour les angles orientés est admise.

Choix exercice 1erS

35 Soit un rectangle ABCD avec $AB = a$ et $AD = b$ ($a > 0$ et $b > 0$). Soit I le milieu de [DC].



On s'intéresse à la mesure de l'angle géométrique $\widehat{IEB}$.

1. Méthode utilisant la relation de Chasles

- En écrivant $\vec{AI} = \vec{AD} + \vec{DI}$ et $\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB}$, exprimer $\vec{AI} \cdot \vec{DB}$ en fonction de a et b .
- Déterminer les distances AI et DB.
- En déduire la valeur de $\cos(\alpha)$.
- Dans le cas particulier où $a = 4$ et $b = 1$, déterminer alors une valeur approchée de l'angle géométrique $\widehat{IEB}$ au degré près.

2. Méthode utilisant un repère orthonormé

- Dans le repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \frac{\vec{AB}}{a}$ et $\vec{j} = \frac{\vec{AD}}{b}$, donner les coordonnées des points A, B, D et I, puis celles des vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{DB}$.
- Calculer $\vec{AI} \cdot \vec{DB}$ en fonction de a et b .
- Après avoir calculé la norme des vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{DB}$, en déduire $\cos(\alpha)$ en fonction de a et b .
- On considère le cas particulier où $a = 3\sqrt{2}$ et $b = 3$. Que peut-on dire de l'angle géométrique $\widehat{IEB}$?

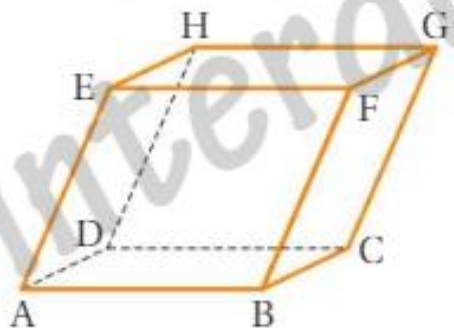
Géométrie vectorielle Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires. Vecteurs coplanaires. Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires. Repérage. Représentation paramétrique d'une droite.	• Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité. • Utiliser les coordonnées pour : - traduire la colinéarité ; - caractériser l'alignement ; - déterminer une décomposition de vecteurs.	On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées. On fait observer que des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles. ▣ Il est intéressant de présenter la démonstration du théorème dit « du toit ». On fait percevoir les notions de liberté et de dépendance. On ne se limite pas à des repères orthogonaux. La caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires conduit à une représentation paramétrique de ce plan. ↔ [SI] Cinématique et statique d'un système en mécanique.
--	--	--

Choix exercice TS

Savoir-faire 11

Montrer que deux plans sont perpendiculaires

32 ABCDEFGH est un parallélépipède.



On munit l'espace du repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des points B, F, G et H.
2. On nomme I et J les milieux respectifs de [HG] et [EH], K et L les centres respectifs des faces BCGF et ABFE.
 - a. Déterminer les coordonnées des points I, J, K et L.
 - b. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JL}$.
 - c. En déduire la position relative des droites (IK) et (JL).
3. Montrer de même que les droites (HB) et (IK) sont parallèles.

ÉNONCÉ L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont pour équations respectives :

$$x + 2y + 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

- a. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont-ils perpendiculaires ?
- b. Déterminer une équation du plan $\mathcal{Q}$ perpendiculaire aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, passant par le point $A(1 ; 1 ; 1)$.

SOLUTION

MÉTHODE

Correction et analyse de l'exercice (2snd)

- On se place dans le repère (D,C,A)
- Pour savoir si les droites (AM) et (EI) sont parallèles, on va tester si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires.
- Pour calculer les coordonnées de ces vecteurs, il nous faut les coordonnées des points A, M, E et I.
- A (0,1); M(2,0); E(-1,0). Calcul des coordonnées du point I milieu de [MN]: $x_i = \frac{1}{2} (x_M + x_N) = \frac{1}{2} (2 + 1) = 3/2$ et $y_i = \frac{1}{2} (y_M + y_N) = \frac{1}{2} (0 + -2) = -1$.
- $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A; y_M - y_A) = (2 - 0; 0 - 1) = (2; -1)$ et $\overrightarrow{EI} = (3/2 - (-1); -1 - 0) = (5/2; -1)$
- Test de la colinéarité: $2 \times (-1) = -2$ et $(-1) \times 5/2 = -5/2 = -2,5$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EI}$ ne sont pas colinéaires, et donc les droites ne sont pas parallèles.

Analyse de l'exercice

- **Savoirs**

- Repérage des points dans un plan
- Lien entre parallélisme des droites et colinéarité de leurs vecteurs directeurs

- **Méthodes**

- Savoir calculer les coordonnées d'un vecteur
- Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment
- Savoir tester une relation de colinéarité (produit en croix)

Analyse production élève 1

- *Droites ne se croisent pas sur le dessin* : droites parallèles sont des droites non sécantes
- *Sauf si on les prolonge ... donc oui elles sont parallèles.*
Confusion droite / segment,
Stade de la géométrie perceptive
- Remédiation:
Supports de droites non sécants à prolonger pour voir qu'elles s'intersectent plus loin

Analyse de la production de l'élève 2

- Calcul des coordonnées des vecteurs (pas trace des calculs mais résultat correct)
- *Les vecteurs ne sont pas égaux donc les droites ne sont pas parallèles.*
-> confusion égalité de vecteurs / colinéarité des vecteurs
- Remédiation: Revoir la notion de colinéarité au moyen de 2 vecteurs directeurs (différents) de deux droites parallèles (montrer la non égalité mais la colinéarité).

Analyse de la production de l'élève 3

- Calcul des longueurs via norme des vecteurs.
- Résultats cohérents (coordonnées des vecteurs, formule de la norme)
- Pas d'explicitation du raisonnement: pourquoi calculer la longueur pour montrer que 2 droites sont parallèles ?
- Configuration du parallélogramme ? ...
- « Remédiation » Montrer qu'il n'y a pas de lien entre longueur et parallélisme (trapèze ...)

Analyse de la production de l'élève 4

- Compare les pentes de deux droites.
 - N'utilise pas la notion de vecteurs.
 - Méthode est possible: il « voit » que les pentes sont différentes, donc en déduit que les droites ne sont pas parallèles.
-
- -> Aucun élément de validation sur la compréhension de l'élève des notions relatives aux vecteurs.