

Oral 2: Optimisation

Jf Culus, le 1 juin 2016

Plan de la présentation

Ici

- Présentation du thème
Niveau – notion – Exo
- Correction exercice jury
- Analyse production élève

Le jour de l'oral 2

- Analyse production élève
- Correction exercice jury
- Présentation du thème
Niveau – notion – Exo

Présentation du thème: Optimisation

- Optimiser: chercher quelles sont les solutions maximisant ou minimisant un objectif quantitatif sous certaines contraintes.
- Maximiser le gain / minimiser la perte ...

2snd

1. Fonctions

L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :

- un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;
- un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction.

Les situations proposées dans ce cadre sont issues de domaines très variés : géométrie plane ou dans l'espace, biologie, économie, physique, actualité etc. Les logiciels mis à la disposition des élèves (tableur, traceur de courbes, logiciels de géométrie dynamique, de calcul numérique, de calcul formel, etc.) peuvent être utilement exploités.

Étude qualitative de fonctions

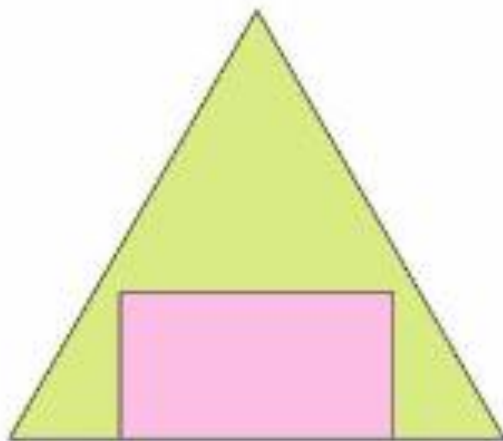
Fonction croissante, fonction décroissante ; maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.

Études de fonctions Fonctions polynômes de degré 2.	• Connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes.	Les résultats concernant les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes sont donnés en classe et connus des élèves, mais peuvent être partiellement ou totalement admis. Savoir mettre sous forme canonique un polynôme de degré 2 n'est pas un attendu du programme.
---	---	---

Inéquations Résolution graphique et algébrique d'inéquations.	• Modéliser un problème par une inéquation. • Résoudre graphiquement des inéquations de la forme : $f(x) < k; \quad f(x) < g(x).$ • Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du premier degré. • Résoudre algébriquement les inéquations nécessaires à la résolution d'un problème.	Pour un même problème, il s'agit de : • combiner les apports de l'utilisation d'un graphique et d'une résolution algébrique, • mettre en relief les limites de l'information donnée par une représentation graphique. Les fonctions utilisables sont les fonctions polynômes de degré 2 ou homographiques.
---	---	---

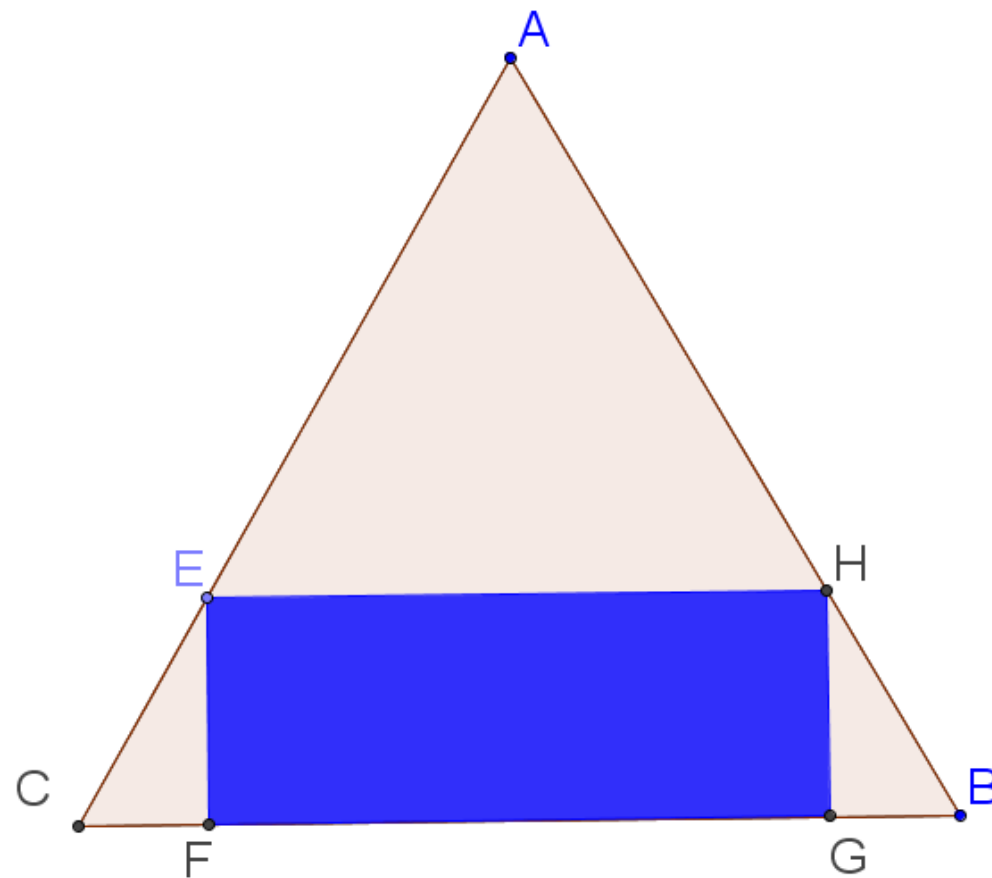
Dessiner un rectangle !

On souhaite dessiner un rectangle dans un triangle équilatéral de côté 10.



Trouver comment tracer ce rectangle pour que son aire soit la plus grande possible.

On pourra se limiter au cas où un des côtés du rectangle est confondu avec un des côtés du triangle.



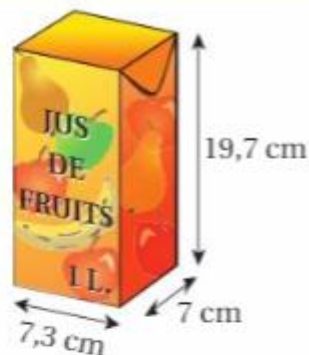
Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur 10cm.
 Soit ECGH un rectangle tel que $F, G \in [BC]$, $E \in [AC]$ et $H \in [AB]$.
 On pose $CF = BG = x$.

- 1, Conjecturer, à l'aide de Géogébra, la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle EFGH est maximale.
2. Calculer FE. En déduire que l'aire de EFGH est $A(x) = 4x(5-x)$
3. Trouver x de sorte que l'aire du rectangle EFGH soit maximale

1^{er} S

Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction dérivable en un point. Fonction dérivée. Dérivée des fonctions usuelles : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x^n$ (n entier naturel non nul). Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient. Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	• Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé. • Calculer la dérivée de fonctions. • Exploiter le sens de variation pour l'obtention d'inégalités.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé. On évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Il est intéressant de présenter le principe de démonstration de la dérivation d'un produit. Il n'est pas toujours utile de recourir à la dérivation pour étudier le sens de variation d'une fonction. On traite quelques problèmes d'optimisation.
---	---	---

L'entreprise Tetra Pak® propose des emballages parallélépipédiques à base presque carrée qui contiennent 1 litre. Les dimensions du modèle « jus de fruit » sont données ci-contre.



L'objet de ce problème est de déterminer les dimensions d'un emballage parallélépipédique à base carrée contenant 1 litre qui nécessite un minimum de carton pour sa fabrication.

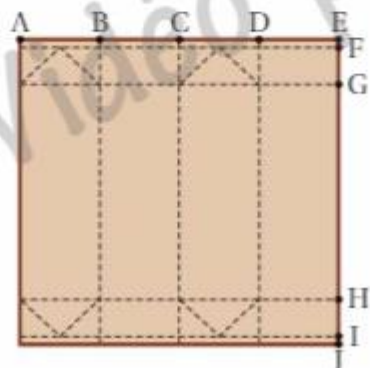
a. Notons h la hauteur de la boîte et x la longueur d'un côté de sa base carrée (les dimensions sont en cm).

En tenant compte de son volume, déterminer h en fonction de x .

b. Le patron de la boîte est un grand rectangle constitué de rectangles et de triangles rectangles tels que :

$AB = BC = CD = DE = x$; $FG = HI = \frac{x}{2}$; $EF = IJ = 0,8$ cm ;

$GH = h$.



Calculer l'aire de ce patron en fonction de h et x , puis uniquement en fonction de x .

c. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 4x^2 + \frac{32}{5}x + \frac{4\,000}{x}$$

Montrer que sa dérivée f' est du signe de $5x^3 + 4x^2 - 2\,500$.

d. Étudier les variations de la fonction f .

Pour cela, on pourra étudier sur $]0 ; +\infty[$ les variations de la fonction $g : x \mapsto 5x^3 + 4x^2 - 2\,500$ et admettre que l'équation $5x^3 + 4x^2 - 2\,500 = 0$ a une solution α sur $]0 ; +\infty[$ avec $\alpha \approx 7,6$.

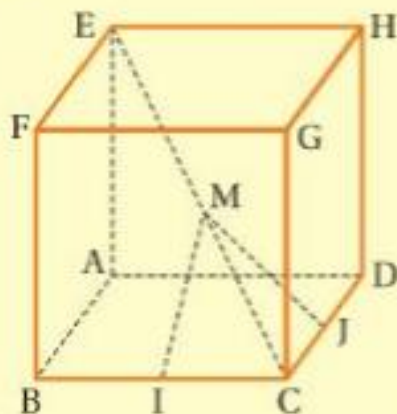
e. Les dimensions du modèle « jus de fruit » sont-elles proches des dimensions optimales en ce qui concerne la consommation de carton pour la fabrication d'une boîte à base carrée ?

REMARQUE Pour optimiser une fabrication, il ne s'agit pas uniquement d'optimiser la quantité de matériel utilisé. Il faut également tenir compte d'autres facteurs : dimensions de la matière première utilisée, ergonomie du produit, dimensions pour pouvoir le mettre en palettes...

93 D'après Bac S, Centres étrangers, 2011.

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD]. Soit M un point quelconque du segment [CE].

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère ortho-normé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t; 1-t; t)$.

2. a. Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].

b. En déduire que le triangle MIJ est isocèle en M.

c. Exprimer IM^2 en fonction de t .

3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale.

On désigne par θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{IMJ}$.

a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0; \pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque

$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b. En déduire que la mesure θ est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.

d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.

e. Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

L'exercice du jury

- Calcul de la longueur $L(h)$ totale de tuyau: $h \in [0;3]$ et $L(h)=h+2 \text{ racine } (4+(3-h)^2)=h+2 \text{ racine } (h^2-6h+13)$.
- Etude du signe de la fonction $g: h \rightarrow \text{rac}(h^2-6h+13)+2h-6$.
 - Etude de la dérivabilité de la fonction $h \rightarrow \text{rac}(h^2-6h+13)$
 - Etude du signe du trinôme $h^2-6h+13$
- Prise en compte de l'intervalle de variation de h

Analyse de la production de l'élève

- Méthode algébrique (plutôt qu'analytique)
- Pas de rédaction / d'explication de ses raisonnements (discriminant, équivalences?)
- Confusion signe de la fonction g et signe du trinôme $3h^2-18h+13$.
Problème de l'équivalence des implications.