

Oral 2: Probabilités

Jf Culus, le 6 juin 2016

Correction de l'exercice du jury

On lance deux dés équilibrés à 6 faces, l'un est rouge et l'autre est noir. On s'intéresse à la somme des nombres qui apparaissent sur la face du dessus.

Le dé rouge porte sur ses faces les numéros : 1; 1; 2; 3; 4; 4.

Le dé noir porte sur ses faces les numéros : 2; 2; 3; 4; 5; 5.

- 1) Combien y-a-t-il d'issues ? Sont-elles équiprobables ?
- 2) Obtient-on plus souvent une somme supérieure ou égale à 7 ou bien une somme inférieure ou égale à 7 ?

Sum					Total
3	(1,2) x 4				4
4	(1,3) x 2	(2,2) x 2			4
5	(1,4) x 2	(2,3) x 1	(3,2) x 2		5
6	(1,5) x 4	(2,4) x 1	(3,3) x 1	(4,2) x 4	10
7	(2,5) x 2	(3,4) x 1	(4,3) x 2		5
8	(3,5) x 2	(4,4) x 2			4
9	(4,5) x 4				4

$\Omega = \{ (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5) \}$

S = VA Somme des 2 faces

$S \in \{3;4;5;6;7;8;9\}$

$P(S \geq 7) = P(S=7) + P(S=8) + P(S=9) = 13/36$

$P(S \leq 7) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7) = 28/36$

On lance deux dés équilibrés à 6 faces, l'un est rouge et l'autre est noir. On s'intéresse à la somme des nombres qui apparaissent sur la face du dessus.

Le dé rouge porte sur ses faces les numéros : 1; 1; 2; 3; 4; 4.

Le dé noir porte sur ses faces les numéros : 2; 2; 3; 4; 5; 5.

- 1) Combien y-a-t-il d'issues ? Sont-elles équiprobables ?
- 2) Obtient-on plus souvent une somme supérieure ou égale à 7 ou bien une somme inférieure ou égale à 7 ?

$$\Omega = \{ 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \}$$

	1	1	2	3	4	4
2	3	3	4	5	6	6
2	3	3	4	5	6	6
3	4	4	5	6	7	7
4	5	5	6	7	8	8
5	6	6	7	8	9	9
5	6	6	7	8	9	9

Analyse production de l'élève 1

Élève 1

1) Il y a 36 issues équiprobables car les deux dés ont 6 faces chacun.

2) "la somme est supérieure à 7" est le contraire de l'événement "la somme est inférieure à 7".

Ainsi $p(S < 7) = 1 - p(S > 7)$ et donc $p(S < 7) = p(S > 7) = 0,5$.

- Issues équiprobables:
identification du cas classique
- Probabilité de l'évènement contraire
- Pas de mise à distance
- Confusion des deux probabilités $P(S < 7)$ et $P(S > 7)$.
Il résout l'équation $x = 1 - x$ soit $x = 1/2$.

Analyse production élève 2

Elève 2

1)

<i>Dé rouge</i>	1	1	2	3	4	4
<i>Dé noir</i>	2	2	3	4	5	5
<i>Somme</i>	3	3	5	7	9	9

Les sommes probables sont donc 3, 5, 7 et 9.

Il n'y a pas équiprobabilité car 3 arrive 2 fois et 5 une fois.

2) *On obtient plus souvent une somme inférieure ou égale à 7 (dans 4 cas) qu'une somme supérieure ou égale à 7 (dans 3 cas).*

-
- Equirépartition: la probabilité est proportionnelle au nombre des issues
- Confusion avec les issues d'expériences
- Reprendre le modèle classique de la somme des faces de 2 dés équilibrés

Analyse production élève 3

Elève 3

- 1) Il y a 7 issues probables : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La loi de probabilité est équirépartie car les dés sont équilibrés.*
- 2) À l'aide d'un arbre, je vois qu'on obtient plus souvent une somme inférieure ou égale à 7 (dans 28 cas) qu'une somme supérieure ou égale à 7 (dans 13 cas).*

- Issues possibles sont les sommes
- Modélisation et raisonnement par arbre probablement correcte
- Probable vs. Possible
- Confusion équiréparties car dés équilibrés

Dans les programmes

• 3ieme

1.4. Notion de probabilité [Thèmes de convergence]	- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité. - Calculer des probabilités dans des contextes familiers.	La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.). La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou à deux épreuves.
---	--	---

• 1ereS

Modèle de la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues. Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli. Schéma de Bernoulli, loi binomiale (loi du nombre de succès). Coefficients binomiaux, triangle de Pascal.	• Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes par un arbre pondéré. • Utiliser cette représentation pour déterminer la loi d'une variable aléatoire associée à une telle situation. • Reconnaître des situations relevant de la loi binomiale. • Calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale.	Pour la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. La notion de probabilité conditionnelle est hors programme. On peut aussi traiter quelques situations autour de la loi géométrique tronquée. ◇ On peut simuler la loi géométrique tronquée avec un algorithme. La représentation à l'aide d'un arbre est privilégiée : il s'agit ici d'installer une représentation mentale efficace. On peut ainsi : faciliter la découverte de la loi binomiale pour des petites valeurs de n ($n \leq 4$) ; introduire le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ comme nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions ; établir enfin la formule générale de la loi binomiale.
---	---	---

TS

Conditionnement, indépendance

Conditionnement par un événement de probabilité non nulle.

Notation $P_A(B)$.

- Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée.

- Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités.

- Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Indépendance de deux événements.

- ▣ Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour $\bar{A}$ et B .

Loi uniforme sur $[a, b]$.

Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.

Lois exponentielles.

Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

- Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a, b]$.

- Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle.

- ▣ Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.

L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0, 1]$. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a, b]$ est introduite à cette occasion par $E(X) = \int_a^b t f(t) dt$. On note que cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

(AP) *Méthode de Monte-Carlo.*

▣ On démontre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$.

L'espérance est définie comme la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x t f(t) dt$ où f est la fonction de densité de la loi exponentielle considérée.