

Oral 2: Algorithmique

Jf Culus, le 7 juin 2016

L'exercice du jury

Une équipe de statisticiens propose les modèles suivants pour comparer l'évolution future de la population française et de la population allemande.

- On note u_n la population de l'Allemagne estimée en millions d'habitants au 1er janvier de l'année $2010 + n$. On a alors $u_0 = 81,2$ et $u_{n+1} = 0,998 \times u_n + 0,2$.
 - On note v_n la population de la France estimée en millions d'habitants au 1er janvier de l'année $2010 + n$. On a alors $v_0 = 63,2$ et $v_{n+1} = 1,002 \times v_n + 0,1$.
1. Écrire un algorithme donnant l'année à partir de laquelle la différence entre la population de l'Allemagne et celle de la France sera inférieure à quinze millions et donner le résultat.
 2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = -18,8 \times 0,998^n + 100$ et $v_n = 113,2 \times 1,002^n - 50$.
 3. Retrouver le résultat de la question 1.

Analyse de la production de l'élève 1

Élève 1

Dans la calculatrice, mode suite, u_n en première colonne, v_n en 2ème colonne, $v_n - u_n$ en 3ème colonne, la différence est inférieure à 15 millions à partir de la 16ème année.

- Sait utiliser un tableur
- Sait faire preuve d'initiative
- Trouve le résultat correct
- Ne fait pas la différence entre algorithme et tableur / programme

n	u_n	v_n	$u_n - v_n$
0	81,2	63,2	18
1	81,2376	63,4264	17,8112
2	81,2751248	63,6532528	17,621872
3	81,3125746	63,8805593	17,4320152
4	81,3499494	64,1083204	17,241629
5	81,3872495	64,3365371	17,0507124
6	81,424475	64,5652101	16,8592649
7	81,4616261	64,7943406	16,6672855
8	81,4987028	65,0239292	16,4747736
9	81,5357054	65,2539771	16,2817283
10	81,572634	65,4844851	16,0881489
11	81,6094887	65,715454	15,8940347
12	81,6462697	65,9468849	15,6993848
13	81,6829772	66,1787787	15,5041985
14	81,7196112	66,4111363	15,308475
15	81,756172	66,6439585	15,1122135
16	81,7926597	66,8772464	14,9154132
17	81,8290744	67,1110009	14,7180734

Analyse de la production de l'élève 2

- On note u_n la population de l'Allemagne estimée en millions d'habitants au 1er janvier de l'année $2010 + n$. On a alors $u_0 = 81,2$ et $u_{n+1} = 0,998 \times u_n + 0,2$.
- On note v_n la population de la France estimée en millions d'habitants au 1er janvier de l'année $2010 + n$. On a alors $v_0 = 63,2$ et $v_{n+1} = 1,002 \times v_n + 0,1$.
- .. Écrire un algorithme donnant l'année à partir de laquelle la différence entre la population de l'Allemagne et celle de la France sera inférieure à quinze millions et donner le résultat.

- Structure correcte de l'algorithme (tant que – fin)
-> rédaction / communication
- Introduit la différence comme unique paramètre
- $u_{n+1} - v_{n+1} = 0,998u_n - 1,002v_n + 0,1$
 $1,002 - 0,998 = 0,004$
- Tente de calculer la différence de manière récursive
- Fait preuve d'analyse critique de son résultat

Élève 2

variables : N et D

début

$18 \rightarrow D$;

$0 \rightarrow N$;

tant que $D > 15$ **faire**

$0,004 \times D + 0,1 \rightarrow D$;

$N + 1 \rightarrow N$;

fin

sorties : *Afficher D et N .*

fin

Mon algorithme ne marche pas car je trouve un an.

Correction des questions 2 et 3

- $U_{n+1}=0,998u_n+0,2$

Montrons par récurrence sur l'entier n que H_n : « $u_n=-18,8 \times 0,998^n+100$ »

Initialisation: $n=0$ $-18,8+100=81,2 = u_0$ donc on vérifie H_0

- Hérédité: On suppose H_n vraie pour $n \geq 0$ et démontrons H_{n+1} .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,998 \times u_n + 0,2 = 0,998 (-18,8 \times 0,998^n + 100) + 0,2 \\ &= -18,8 \times 0,998^{n+1} + 100 \quad \text{aussi } H_{n+1} \text{ est bien vérifiée.} \end{aligned}$$

- Conclusion: On démontre ainsi que, pour tout entier naturel n , la formule H_n est vérifiée.

On cherche n tel que $u_n - v_n < 15$, soit

$$-18,8 \times 0,998^n + 100 - 113,2 \times 1,002^n + 50 < 15$$

$$135 < 18,8 \times 0,998^n + 113,2 \times 1,002^n$$

-> impossible de résoudre cela algébriquement

-> possible de conclure via suites

n	Expression
0	132
1	132,1888
2	132,378128
3	132,567985
4	132,758371
5	132,949288
6	133,140735
7	133,332715
8	133,525226
9	133,718272
10	133,911851
11	134,105965
12	134,300615
13	134,495802
14	134,691525
15	134,887787
16	135,084587
17	135,281927

L'algorithmique: thème transversal

- Arithmétique:
Division euclidienne, Calcul du PGCD, Test de primalité, calcul des coefficients de Bezout
- Analyse:
Etude de suites, valeur approchée d'une solution d'une équation (dichotomie), approximation d'une intégrale, problèmes d'optimisation
- Probabilités:
Simulations d'une expérience aléatoire, Modélisation d'une situation
- Divers
Algo de construction géométrique, tester si 2 vecteurs sont colinéaire / orthogonaux, .matrices, théorie des graphes (parcours en largeur / profondeur...).