

Examen EC 121 Analyse

Solution

Partie A: Convergence des sommes de Riemann

1. La fonction f étant continue sur l'intervalle $[a; b]$, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de l'intervalle $[a; b]$, si $|x - y| \leq \eta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon'$. Il suffit donc de prendre $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$ dans le critère de continuité pour obtenir l'existence du $\eta > 0$ vérifiant $\forall (x, y) \in [a; b]^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

On obtient la valeur de N au brouillon par un raisonnement d'analyse synthèse: on veut que $t - x_k \leq \eta$ et on a que $t - x_k \leq \frac{b-a}{N}$ donc si $\frac{b-a}{N} \leq \eta$, on obtient ce que l'on veut ... On rédige juste le fait que cette valeur de N est suffisante

2. (a) Posons N tel que $\frac{b-a}{N} \leq \eta$, donc par exemple $N = E\left(\frac{b-a}{\eta}\right) + 1$. Aussi, pour tout $n \geq N$, nous avons $n \geq N$ implique $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ d'où $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\forall t \in [x_k; x_{k+1}]$, on a $x_k \leq t \leq x_{k+1}$ donc $0 \leq t - x_k \leq x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \leq \frac{b-a}{N} \leq \eta$. Il s'ensuit donc par la question précédente que, pour tout $t \in [x_k; x_{k+1}]$, nous avons $|f(t) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.
- (b) Remarquons que la fonction $t \mapsto |f(t) - f(x_k)|$ est continue sur $[x_k; x_{k+1}]$, donc intégrable sur cet intervalle. Aussi, en intégrant pour t variant de x_k à x_{k+1} , nous obtenons par croissance de l'intégrale:

Ne pas oublier de dire que la fonction est intégrable. Les critères les plus courants sont continues ou continue par morceaux

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\varepsilon}{b-a} dt = (x_{k+1} - x_k) \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{n}$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité $\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt$ pour déduire que, pour tout $k \leq n-1$, $\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{n}$.

Rappelons que le symbole $\int$ et une somme finie commutent toujours

Nous avons

$$\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)S_n(f) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \underbrace{\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}_{= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right|$$

En utilisant les inégalités précédentes, l'inégalité triangulaire généralisée permet alors d'obtenir:

L'inégalité triangulaire est $|a+b| \leq |a| + |b|$. La version généralisée est $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

3. L'encadrement précédent prouve que $(b-a)S_n(f)$ converge, quand n tend vers $+\infty$, vers $\int_a^b f(t) dt$ d'où $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Il faut ici exprimer R_n en fonction de S_n et montrer que la différence tend vers 0 (et ne pas refaire tous les raisonnements précédents!)

Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(f) = S_n(f) - \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f(1)$. La suite $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant convergente, nous en déduisons que la suite $(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ l'est aussi et a même limite, soit $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Ici, il faut chercher! Au départ, j'essayais d'identifier avec S_n en posant $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (à cause de l'indice $k=0$ mais j'avais un décalage dans les indices de la somme obtenu, donc je suis passé à essayer d'identifier avec R_n . Une autre idée était de poser $v_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ car $u_n = v_{2n} - v_n$ et d'essayer d'obtenir v_n comme un S_n ou un R_n ...

4. *Application* Considérons la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Ici, $a = 1$, $b = 2$ donc $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$, $x_k = 1 + \frac{k}{n} = \frac{n+k}{n}$. On a alors $f(x_k) = \frac{n}{n+k}$ d'où $R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = u_n$. D'après le résultat précédent, nous savons que $(R_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2-1} \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

5. (a) La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, nous en déduisons qu'elle est dérivable et de dérivée continue: aussi f' est-elle une fonction continue et donc elle est bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$, d'où il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a; b]$, $|f'(t)| \leq M$.

Question faisant directement appel au cours: il faut savoir bien traiter ce genre de question

- (b) D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur l'intervalle $[t; x_{k+1}]$ (avec $x_k \leq t \leq x_{k+1}$), nous savons que $|f(t) - f(x_k)| \leq M(t - x_k)$.
- (c) Nous savons que $\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt$. Par croissance de l'intégrale, l'inégalité de la question précédente implique que $\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t - x_k) dt = \left[M \left(\frac{t^2}{2} - x_k t \right) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{M}{2} (x_{k+1} - x_k)^2$. Comme $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$, on déduit alors que

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n^2}$$

$$\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)S_n(f) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

Inégalité des accroissements finis Soit f continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et de dérivée bornée par M sur $]a; b[$. Alors $\forall (x, y) \in [a; b]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.
Résulte directement du T.A.F. car $|f'(c)| \leq M$

Prendre le temps de faire bien ses calculs

6. (a) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ d'après le théorème de composition des fonctions dérivables et nous avons $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. La fonction $x \mapsto -x^2$ étant décroissante sur $[0; 1]$, par composition avec la fonction exponentielle qui est toujours croissante sur $\mathbb{R}$, nous déduisons que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est décroissante sur $[0; 1]$. Il s'ensuit alors que la fonction f' est croissante sur $[0; 1]$ puisque la fonction $x \mapsto -2x$ est négative sur cet intervalle. $|f'(t)| = 2xe^{-x^2}$ est, elle, décroissante sur $[0; 1]$ et donc elle admet son maximum en 0, en prenant la valeur $f(0) = 2$. Aussi, $M = 2$.

Ici il faut trouver la valeur maximale de $|f'|$ (dire f' continue sur un compact donc bornée et atteint ses bornes ne suffit pas car ne donne pas la valeur de M). Pour ce faire, il faut étudier le sens de variation de $|f'|$: soit en dérivant, soit par des arguments de compositions de fonctions croissantes / décroissantes

- (b) D'après l'inégalité de la question 5, $S_n(f)$ donne une approximation de $\int_a^b f(t) dt$ à $\frac{M(b-a)^2}{2n}$. Ici, $a = 0$, $b = 1$, $M = 2$ donc l'approximation est à $\frac{1}{n}$. Un algorithme peut être:

Entrée: ε

Initialisation: $n, S := 0$;

Poser $n = E(1/\varepsilon) + 1$.

Pour k allant de 0 à $n - 1$ faire

$$S + \frac{1}{n} e^{-(k/n)^2} \rightarrow S$$

Fin Pour.

Afficher S .

Partie B: application à l'étude de suites

1. Pour tout $t \in [k/n; (k+1)/n]$, la décroissance de f donne: $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$. En intégrant cette relation pour t variant de $\frac{k}{n}$ à $\frac{k+1}{n}$ (les fonctions considérées étant toutes continues), nous obtenons par croissance de l'intégrale

$$\underbrace{\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt}_{= \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt \leq \underbrace{\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dt}_{= \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Croissance de l'intégrale Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a; b]$ et $\forall t \in [a; b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

2. Additionnons donc les inégalités précédentes pour k variant de 1 à $n - 1$; nous obtenons alors

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)}_{= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n f\left(\frac{k}{n}\right)} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) dt}_{= I(1/n)} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Nous déduisons alors que $r_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I(1/n) \leq r_n - \frac{1}{n} f(1)$, d'où nous déduisons que $I(1/n) + \frac{1}{n} f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Il faut savoir faire ce genre de petite ré-écriture...

3. Supposons donc que $I(x) \rightarrow \ell$ quand $n \rightarrow +\infty$. Remarquons déjà que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f(1) = 0$. Enfin, par le théorème de composition des limites, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f(1/n) = \lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \ell$. Aussi, nous déduisons du théorème d'encadrement des suites convergente ayant même limites que la suite (r_n) est convergente et de limite ℓ .
4. (a) Par un petit calcul et en utilisant les propriétés de la fonction logarithme, nous obtenons que $r_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - n^2}{4n^2} - \frac{1}{2n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$. Or, comme $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, nous déduisons que $r_n = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{24n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ d'où la formule souhaitée.
- (b) Etudions le sens de variation de la fonction f . Cette fonction est dérivable et $f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x} \leq 0$ car $x \in]0; 1]$; la fonction f est donc décroissante et continue sur $]0; 1]$. $I(x) = \int_x^1 f(t)dt = \int_x^1 \frac{t^2 - 1}{4} - \frac{1}{2} \ln(t) dt = \left[\frac{t^3 - 3t}{12} - \frac{1}{2}(t \ln(t) - t) \right]_x^1 = \frac{1/3 - 1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x^3/3 - x}{4} + \frac{1}{2}(t \ln(t) - t) \rightarrow \frac{1}{3}$ quand $x \rightarrow 0$. De plus $x f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$. Aussi, comme toutes les hypothèses de la question 3 sont vérifiées, nous en déduisons que la suite (r_n) converge vers $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 1/3$. Or, $\frac{(n+1)(2n+1)}{24n^2} \rightarrow \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ quand $n \rightarrow +\infty$. Aussi par le théorème d'opérations algébriques sur les suites convergentes, nous en déduisons que la suite de terme général $\ln\left(\frac{n!^{1/n}}{n}\right)$ converge vers $2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} = -1$. En composant par la fonction exponentielle qui est continue en -1 , nous déduisons que $\left(\frac{n!^{1/n}}{n}\right)$ converge vers $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Question avec pas mal de petits calculs: il faut y aller sereinement, prendre son temps. Déjà faire au brouillon puis refaire indépendamment sur sa feuille...

Examen EC 132 Algèbre

Solution

Ici, une boucle Pour ou For est plus adaptée puisque vous savez qu'il faut tester toutes les valeurs entre 300 et 400. Le `==` test la condition d'égalité: `2 == 3` renvoie Faux alors que `2 == 2` renvoie Vrai.

Le calcul du nombre de division euclidienne n'est pas si simple : si le test `mod(n,17) == 9` (1 division euclidienne) est faux, alors l'algorithme ne teste pas la seconde partie (car faux de toutes façon), mais si `mod(n,17) == 9`, on effectue 2 divisions euclidiennes...

Exercice 1: Arithmétique

1. Initialisation: $k = 0$; Nombre de divisions euclidiennes effectuées Pour n allant de 300 à 400, faire:
 Si `mod(n, 17) == 9` alors $k + 2 \mapsto k$ Sinon $k + 1 \mapsto k$;
 Fin Si
 Si `mod(n, 17) == 9` et `mod(n, 5) == 3` alors Afficher n ;
 fin Si.
 Afficher "le nombre de division euclidienne est" k ;
2. Soit n le nombre de jetons de Zoé. Nous savons que si elle fait des tas de 17, il reste 9 jetons donc le reste de la division euclidienne de n par 17 est 9 d'où $n \equiv 9 \pmod{17}$. De même, si elle fait des tas de 5, il lui reste 3 jetons donc le reste de la division euclidienne de n par 5 est 3. Il s'ensuit que n vérifie $n \equiv 3 \pmod{5}$. Donc n est bien solution du système (S) . Enfin, nous savons que $300 \leq n \leq 400$.
3. (a) 17 et 5 étant des nombres premiers différents, ils sont donc premiers entre eux. Aussi, d'après l'identité de Bezout, il existe un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
- (b) Posons donc $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$. Comme $17u + 5v = 1$, alors $17u = 1 - 5v$ d'où $n_0 = 3(1 - 5v) + 9 \times 5v$ et donc $n_0 \equiv 3 \pmod{5}$. De même, de $5v = 1 - 17u$ nous déduisons que $n_0 \equiv 9 \pmod{17}$ et donc n_0 vérifie (S) .
- (c) Calculons déjà un couple (u, v) vérifiant $17u + 5v = 1$. D'après l'algorithme d'Euclide, nous avons $17 = 3 \times 5 + 2$, $5 = 2 \times 2 + 1$ d'où $1 = 5 - 2 \times 2$ et donc $1 = 5 - 2(17 - 3 \times 5) = 7 \times 5 - 2 \times 17$. Aussi, le couple $(-2; 7)$ convient. Alors $n_0 = 3 \times 17 \times (-2) + 9 \times 5 \times 7 = 213$.

On attend donc une justification de l'existence, sans spécialement savoir qui sont u et v

Attention à l'ordre de u et v , ainsi qu'aux signes!

4. Caractérisation des éléments de S

- (a) Comme n et n_0 vérifient tous deux le système (S) , nous en déduisons que $17|(n-n_0)$ et $5|(n-n_0)$. 5 et 17 étant premiers entre eux, il s'ensuit que $17 \times 5 | n - n_0$ c'est-à-dire que $n - n_0$ est divisible par 85, soit $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$.
- (b) De la dernière relation de congruence, nous déduisons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = n_0 + 85k = 213 + 85k = 43 + 85(k+2)$. Il suffit alors de noter $k' = k+2$ pour obtenir que n s'écrit nécessairement $n = 43 + 85k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement, supposons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 43 + 85k$. Alors $n \equiv 3 \pmod{5}$ et $n \equiv 9 \pmod{17}$ d'où $n \in S$. On obtient alors bien l'équivalence souhaitée.
- (c) En regardans quels sont les entiers de la forme $43 + 85k$ compris entre 300 et 400, on obtient que $n = 383$.

Exercice 2: Limite d'une suite

1. Il semble que, lorsque a est positif, la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ alors que lorsque $a > 0$, elle diverge vers $+\infty$. Evidemment, lorsque $a = 0$, la suite est constante à 0 et donc converge. Dans la suite, on suppose que $a \neq 0$.

$$2. X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}. \text{ Pour tout } n \geq 0, \text{ nous avons que } X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 5u_{n+1} - 6u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n.$$

3. (a) Calculons le déterminant de cette matrice: nous avons: $\det(P) = 1 \times 3 - 2 \times 1 = 1$ donc $\det(P) \neq 0$ et donc P est inversible. Son inverse est la matrice $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- (b) Calculons $P^{-1} \times A \times P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$.
On a donc bien D diagonale vérifiant $A = P \times D \times P^{-1}$

La multiplication matricielle n'étant pas commutative, l'ordre des matrices est évidemment crucial...

4. (a) D'après la question 2. nous savons que, pour tout $n \geq 0$, $X_{n+1} = AX_n$. On déduit alors par récurrence facile que $X_n = A^n X_0$. Or, $A = P \times D \times P^{-1}$ donc $A^n = (P \times D \times P^{-1})^n = \underbrace{(P \times D \times P^{-1}) \times (P \times D \times P^{-1}) \times \dots \times (P \times D \times P^{-1})}_{n \text{ fois}} = P \times$

$$D \times \underbrace{P^{-1} \times P}_{=I_3} \times D \times \underbrace{P^{-1} \times P}_{=I_3} \times D \times P^{-1} \times \dots \times P \times D \times P^{-1} = P \times D^n \times P^{-1}. \text{ Il}$$

Question très classique à savoir bien faire (avec la rédaction)

s'ensuit alors que pour tout $n \geq 0$, $X_n = (P \times D^n \times P^{-1}) X_0$.

- (b) Comme D est une matrice diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Ce démontre par récurrence, mais résultat vraiment facile

- (c) Calculons donc $A^n = P \times D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} & -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix}$. Comme $X_n = A^n X_0$, nous obtenons que $X_n = \begin{pmatrix} a(2 \times 2^n - 3^n) \\ a(2 \times 2^{n+1} - 3^{n+1}) \end{pmatrix}$. On en déduit alors que $u_n = a(2 \times 2^n - 3^n)$.

- (d) Nous avons $u_n = a(2 \times 2^n - 3^n) = a3^n (2 \times (\frac{2}{3})^n - 1)$. Comme $0 < \frac{2}{3} < 1$, nous déduisons du critère de convergence des suites géométriques que la suite $((\frac{2}{3})^n - 1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -1 . Comme par ce même critère, la suite (3^n) diverge vers $+\infty$, on en déduit que la suite (u_n) diverge vers $-\varepsilon\infty$ où $\varepsilon = \pm 1$ désigne le signe de a . Evidemment, lorsque $a = 0$, la suite (u_n) est constante à 0 donc converge.