

Partiel bis: EC 132 Structures algébriques
Jeudi 22 Janvier 2014

Dans tout le sujet, on désigne par E un espace vectoriel complexe. On désignera par id_E l'endomorphisme identité de E et pour tout endomorphisme f de E , nous noterons $f^0 = id_E$ et pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que l'endomorphisme f de E est *cyclique d'ordre p* s'il existe un élément $x_0 \in E$ vérifiant les trois conditions suivantes:

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad f^p(x_0) = x_0 \\ \bullet \quad \text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est génératrice de } E \\ \bullet \quad \text{la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est constituée d'éléments deux à deux distincts de } E \end{array} \right.$$

On dit alors que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un cycle de f .

Partie I: Etude d'un exemple

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel complexe $E = \mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E . On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E et déterminer la matrice associée à f relativement à cette nouvelle base.

On pourra vérifier que $f^3(e_1) = -e_1 - f(e_1) - f^2(e_1)$.

- Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f .
- Montrer que $f^4 = id_E$

En déduire que le spectre de f vérifie $Sp(f) \subset \{-1; 1; -i; i\}$.

- Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Précisez une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$.

Partie II: Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n (ie. $E = \mathbb{C}^n$), et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p . Soit $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f .

- Montrer que $p \geq n$.
- Montrer que $f^p = id_E$. En déduire que f est bijective.

3. On désigne par m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre.
- (a) Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.
 - (b) Montrer alors que, pour tout entier naturel $k \geq m$, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.
 - (c) En déduire que $m = n$ et que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est une base de E .
4. On note par $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que

$$f^n(x_0) = a_0x_0 + a_1f(x_0) + a_2f^2(x_0) + \dots + a_{n-1}f^{n-1}(x_0).$$

- (a) On considère l'endomorphisme g de E défini par $g = a_0id_E + a_1f + a_2f^2 + \dots + a_{n-1}f^{n-1}$
 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0)$
 En déduire alors que $f^n = a_0id_E + a_1f + a_2f^2 + \dots + a_{n-1}f^{n-1}$
 - (b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.
 - (c) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $rg(f - \lambda id_E) \geq n - 1$.
 En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.
5. On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre $n = \dim(E)$. Soit $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ un cycle de f .
- (a) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de f , alors $\lambda^n = 1$.
 - (b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.
 - (c) Montrer que f est diagonalisable. Déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de f ainsi que la matrice associée à f dans celle-ci.