

Solution Partiel bis: EC 132 Structures algébriques
Jeudi 22 Janvier 2014

Partie I: Etude d'un exemple

1. Nous avons $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (puisque e_1 est le premier vecteur de la base $\mathcal{B}$). Nous avons alors $f(e_1) =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (la première colonne de la matrice A est l'image du premier vecteur de base par f). Il s'ensuit

donc que $f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3$ d'où par linéarité de f nous déduisons que $f^2(e_1) = f(e_1) + f(e_2) - 2f(e_3) =$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Pour montrer que } (e_1, f(e_1); f^2(e_1)) \text{ est une base de } \mathbb{C}^3, \text{ considérons}$$

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Elle est alors de rang maximal 3, d'où la famille $(e_1, f(e_1); f^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

Autre méthode: Pour montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1); f^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{C}^3$, on peut aussi calculer le déterminant de cette matrice et montrer qu'il est non nul.

Dans cette nouvelle base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, nous avons de manière évidente $f(e'_1) = e'_2$ et $f(e'_2) = e'_3$. Reste

donc à établir l'image de $f(e'_3) = f(f^2(e_1))$. Déjà, puisque $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, nous

en déduisons que $f^2(e_1) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$. Aussi, $f^3(e_1) = -e_1 + e_2$ puisque $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ On remarque alors que } -e_1 + e_2 = -e_1 - (e_1 + e_2 - 2e_3) - (-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = -e_1 - f(e_1) - f^2(e_1) =$$

$-e'_1 - e'_2 - e'_3$. Il s'ensuit alors que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Dans la base $\mathcal{B}$, nous avons donc $f^3(e_1) = -e_1 + e_2$ d'où $f^4(e_1) = -f(e_1) + f(e_2) = e_1$. Il s'ensuit donc par définition d'un cycle que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est un cycle de f .
3. Nous savons donc que $f^4(e_1) = e_1$. Montrons que tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ sont invariants par f^4 . Nous avons $f^4(e_1) = e_1$ d'où $f^4(e'_2) = f^4(f(e_1)) = f(f^4(e_1)) = f(e_1) = e'_2$, $f^4(e'_3) = f^4(f^2(e_1)) = f^2(f^4(e_1)) = f^2(e_1) = e'_3$. Aussi, tous les vecteurs de base de $\mathcal{B}'$ étant invariants par f^4 , il s'ensuit que $f^4 = id_E$.

Autre méthode: On pouvait aussi (assez simplement) calculer A^4 (par exemple A^2 et élever au carré) et trouver la matrice nulle.

Nous avons donc $f^4 - id_E = 0$, donc que le polynôme $P(X) = X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de f . Les racines de ce polynôme sont les racines 4-ième de l'unité, soit $1, i, -i$ et -1 : aussi, les valeurs propres possible de f sont-elles dans $\{-1; 1; i; -i\}$.

4. Le polynôme caractéristique de A est $-X^3 - X^2 - X - 1$. Aussi on vérifie que les complexes -1 , $-i$ et i sont racines de ce polynôme. Il s'ensuit donc que les valeurs propres de A sont $Sp(A) = \{-1, i, -i\}$:

aussi la matrice A est-elle semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.

Pour trouver la matrice de passage P , nous devons trouver une base de vecteurs propres. Nous obtenons

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 1+i \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1+i & -1-i \end{pmatrix}.$$

Partie II: Cas général

- Un cycle étant une famille génératrice de E , son cardinal est supérieur ou égal à la dimension de l'espace vectoriel E . Aussi nous obtenons que $p \geq n$.
- Considérons $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice. Soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$: calculons $f^p(f^k(x_0)) = f^{p+k}(x_0) = f^k \circ f^p(x_0)$. Or, nous savons que $f^p(x_0) = x_0$ par hypothèse: aussi en déduisons-nous que $f^p(f^k(x_0)) = f^k(x_0)$: aussi, l'endomorphisme f^p est l'identité pour tous les éléments de la famille génératrice $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$; il s'ensuit alors que $f^p = id_E$.
L'endomorphisme f^p étant bijectif, nous en déduisons que $f \circ f^{p-1} = id_E$ d'où f est une bijection, de réciproque f^{p-1} .

- Nous savons que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est une famille libre alors que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est liée: aussi, le vecteur $f^m(x_0)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.
 - Raisonnons par récurrence sur l'entier $k \geq m$.
Initialisation: Pour $k = m$, nous venons de démontrer cette propriété qui est donc établie.
Hérédité: Supposons que pour $k \geq m$, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$, aussi il existe des complexes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ tels que $f^k(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i(x_0)$. En composant par f , nous obtenons que $f^{k+1} = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^{i+1}(x_0) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{i-1} f^i(x_0) + f^m(x_0)$. Or, comme $f^m(x_0) \in Vect(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$, nous en déduisons que $f^{k+1}(x_0)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$. On conclut donc par le théorème de la récurrence que, pour tout $k \geq m$, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.
 - Nous déduisons de la question précédente que les éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ sont combinaisons linéaires des éléments de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$. Aussi, nous en déduisons que $\underbrace{Vect(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))}_{=E} \subset Vect((x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)))$, d'où la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E . Puisqu'elle est libre, c'est donc une base de E , d'où $m = n$.

- Pour tout entier naturel k , nous avons

$$f(f^k(x_0)) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(f^k(x_0)) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{k+j}(x_0) = f^k \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x_0) \right)$$

On en déduit alors que $\forall k \in \mathbb{N}$, $g^k(x_0) = f^n(f^k(x_0))$. Aussi, les endomorphismes g et f^n coïncident sur une base de E , d'où ces endomorphismes sont égaux. Aussi, $f^n = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.

(b) Nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

- (c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous avons pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $(f - \lambda \text{id}_E)(f^k(x_0)) = f^{k+1}(x_0) - \lambda f^k(x_0) = e'_{k+1} - \lambda e'_k$. Aussi, la famille $e'_1 - \lambda e'_0, e'_2 - \lambda e'_1, e'_3 - \lambda e'_2, \dots, e'_n - \lambda e'_{n-1}$ est donc une famille d'éléments de $\text{Im}(f - \lambda \text{id}_E)$. Or, la famille $e'_1 - \lambda e'_0, e'_2 - \lambda e'_1, e'_3 - \lambda e'_2, \dots, e'_{n-1} - \lambda e'_{n-2}$ est libre puisque si $\mu_1(e'_1 - \lambda e'_0) + \mu_2(e'_2 - \lambda e'_1) + \mu_3(e'_3 - \lambda e'_2) + \dots + \mu_n(e'_n - \lambda e'_{n-1}) = 0$ alors nous obtenons que $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$. Aussi nous en déduisons que $\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \geq n - 1$.

Soit alors $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Alors d'après le théorème du rang, nous avons $\dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)) + \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) = n$. Or, $\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \geq 1$ et comme $\dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)) \geq 1$ (puisque λ valeur propre, il existe nécessairement au moins un vecteur propre). Il s'ensuit alors que $\dim(\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)) = 1$ d'où le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1.

5. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f et soit $v \neq 0$ tel que $f(v) = \lambda v$. Alors par une récurrence, nous avons que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(v) = \lambda^k v$ d'où $f^n(v) = \lambda^n v$. Or, nous savons que $f^n = \text{id}_E$ d'où $(1 - \lambda^n)v = 0$. Comme $v \neq 0$, nous en déduisons que $\lambda^n = 1$, donc que λ est une racine n -ième de l'unité.

(b) Dans la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 1 & \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Montrons que toutes les racines n -ième de l'unité sont valeurs propres de la précédente matrice. Soit

alors $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine n -ième de l'unité. Nous avons $f(x) = \lambda x$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 1 & \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \dots a_n \end{pmatrix}$$

$\lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \dots a_{n-1} \end{pmatrix}$ On en déduit alors $\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$, $a_k = \lambda a_{k+1}$ et $a_{n-1} = \lambda a_0$. Nous obtenons

alors qu'un vecteur propre associé à λ est

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque nous savons que les espaces propres

sont de dimension 1, nous en déduisons que $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$.