

EC 142 CC2: Probabilités

Mentir pour réussir (Exo 49 p375, Math'X TS, Edition 2006)

1. L'événement *le candidat rencontré est admis et a révisé* est l'événement $A \cap R$. Nous avons par la formule de Bayes $P(A \cap R) = P_R(A) \times P(R) = \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{40}$.
2. L'événement *le candidat rencontré est recalé au bac et n'a pas révisé* est $\bar{A} \cap \bar{R}$. La probabilité de cet événement est $P(\bar{A} \cap \bar{R}) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(\bar{A}) = \frac{1}{4} \times \frac{8}{10} = \frac{8}{40}$.
3. $\{R, \bar{R}\}$ forme un système complet d'événement. Aussi, d'après la formule des probabilités totales, nous avons $P(A) = P_R(A) \times P(R) + P_{\bar{R}}(A) \times P(\bar{R}) = \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{40} + \frac{2}{40} = \frac{29}{40}$.
4. L'événement *le candidat est un menteur* si il a le bac et qu'il a révisé ou s'il est recalé au bac et qu'il n'a pas travaillé. Ainsi, nous avons $M = (A \cap R) \cup (\bar{A} \cap \bar{R})$. Notons que les événements $(A \cap R)$ et $(\bar{A} \cap \bar{R})$ sont disjoints, d'où nous avons

$$P(M) = P((A \cap R) \cup (\bar{A} \cap \bar{R})) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap \bar{R}) = \frac{27}{40} + \frac{8}{40} = \frac{35}{40}$$

5. Le candidat est refusé au bac: aussi va-t-il dire que c'est injuste car il avait bien travaillé. Aussi est-ce un menteur lorsqu'il n'a pas révisé. On a ainsi l'égalité des événements $\bar{A} \cap M = \bar{A} \cap \bar{R}$. Notons que $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{29}{40} = \frac{11}{40}$.

$$P_{\bar{A}}(M) = \frac{P(\bar{A} \cap M)}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{R})}{P(\bar{A})} = \frac{8}{40} \times \frac{40}{11} = \frac{8}{11}$$

6. $P_A(M) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap R)}{P(A)} = \frac{27}{40} \times \frac{40}{29} = \frac{27}{29}$.
 $P_{\bar{A}}(M) = \frac{P(M \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{R})}{P(\bar{A})} = \frac{8}{40} \times \frac{40}{11} = \frac{8}{11}$.

Nous avons $\frac{27}{29} > \frac{8}{11}$ d'où $P_A(M) > P_{\bar{A}}(M)$. On a plus de chance de rencontrer un menteur si le candidat est admis plutôt que s'il est refusé ... *ou encore* il y a plus de menteurs chez les admis que chez les recalés.

7. Nous devons comparer $P_M(A)$ et $P_{\bar{M}}(A)$.

$$\text{Calculons } P_M(A) = \frac{P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{P(A \cap R)}{P(M)} = \frac{27}{40} \times \frac{40}{35} = \frac{27}{35}.$$

$$\text{Calculons } P_{\bar{M}}(A) = \frac{P(\bar{M} \cap A)}{P(\bar{M})} = \frac{P(A \cap \bar{R})}{1 - P(M)} = \frac{P_{\bar{R}}(A)P(\bar{R})}{1 - P(M)} = \frac{2/10 \times 1/4}{5/40} = \frac{2}{5}.$$

Comme $\frac{27}{35} > \frac{2}{5}$, on a $P_M(A) > P_{\bar{M}}(A)$. Ainsi, il vaut mieux être menteur pour être admis au bac plutôt que dire la vérité.

4. On vérifie au moins la cohérence: la probabilité doit être comprise entre 0 et 1

5. On peut aussi raisonner de façon ensembliste en partant que $M = (A \cap R) \cup (\bar{A} \cap \bar{R})$ donc $M \cap R = A \cap R$

7. Notez que mentir est une conséquence d'avoir ou non le bac... Ainsi, on conditionne un événement (admis) par une connaissance sur son futur (mentir). Ne pas confondre $P_A(M)$ et $P_M(A)$

EC 121 Analyse de base

Série harmonique alternée: Exo 123 p. 216, Déclic TS

1. (a) Nous avons clairement que l'encadrement, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1$ d'où $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$. Les fonctions considérées étant continues sur $[0, 1]$, on a par croissance de l'intégrale $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$.
 (b) Comme $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ nous en déduisons que pour tout entier naturel n , $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 Ainsi, par le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est-elle convergente et de limite nulle.

$$2. \text{ Nous avons } I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(1+x)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

3. (a) Par associativité de la somme, nous pouvons enlever les parenthèses: les termes se simplifient et on obtient $S_n = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$.

(b) En reportant le résultat de la question 2. dans l'expression de S_n , nous obtenons alors que

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$$

Or, nous avons $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$ et comme par la question 1.b, (I_n) converge vers 0, nous en déduisons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I_0 = \ln(2)$. Ainsi, la série harmonique alternée converge-t-elle vers $\ln(2)$.

3. On constate clairement qu'il va falloir exprimer S_n sous deux formes: d'une part via la simplification somme télescopique et d'autre part via la formule précédente

Somme alternée des inverses des impairs (Terracher TS, édition 2002)

Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Nous reconnaissons la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $(-t^2)$. Aussi, nous avons $1 - t^2 + t^4 + \dots (-1)^n t^{2n} = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2}$. Ainsi, nous en déduisons que

$$1 - t^2 + t^4 + \dots (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1 + t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2}$$

2. Les fonctions considérées étant continues sur l'intervalle $[0, 1]$, il s'ensuit que

$$\int_0^1 1 - t^2 + t^4 + \dots (-1)^n t^{2n} dt - \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt$$

En considérant les primitives nous obtenons alors

$$\underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}}_{=u_n} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt$$

3. Faire les choses dans l'ordre: il faut passer à la valeur absolue d'une part, majorer d'autre part ... Bien rédiger cela

3. Nous avons la majoration, pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$ d'où $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$. En intégrant l'inégalité précédente, nous obtenons par croissance de l'intégrale: $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3}$. Or, d'après la question 2, en considérant la valeur absolue nous avons $|u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}| \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$ d'où nous obtenons la majoration $|u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}| \leq \frac{1}{2n+3}$.

4. Comme $\text{Arctan}'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, nous pouvons calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Enfin, comme la suite $\left(\frac{1}{2n+3}\right)$ est de limite nulle quand $n \rightarrow +\infty$, il s'ensuit que la suite $|u_n - \frac{\pi}{4}|$ converge vers 0 d'où (u_n) converge vers $\pi/4$.

EC 131 Analyse avancée

A propos de suites récurrentes

1. Supposons donc la suite (u_n) convergente vers le réel ℓ . Alors, comme pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on a par continuité de f en ℓ : $f(\ell) = \ell$. Ainsi, si la suite (u_n) converge, alors c'est vers un point fixe de f sur I .

1. Techniquement, pour s'assurer que $\ell \in I$, il faut l'hypothèse I fermée (important pour pouvoir appliquer la continuité de f en ℓ)

2. Moralité: Quand f est croissante, (u_n) est monotone et sa monotonie est donnée par le signe de $u_1 - u_0$

2. (a) Par croissance de f on a $f(u_0) \geq f(u_1)$ soit $u_2 \geq u_1$. En appliquant $n - 1$ fois la fonction f à cette inégalité, on obtient $u_{n+1} \geq u_n$ d'où la suite (u_n) est croissante.
- (b) On procède de même: en appliquant la fonction $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_n$, nous obtenons que $u_n \geq u_{n+1}$ d'où la suite (u_n) est décroissante.
- (c) Lorsque $u_0 = u_1$, l'application de f^n implique que $u_{n+1} = u_n$ d'où la suite (u_n) est constante.
3. (a) Il est aisé de constater que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$, donc on restreint l'intervalle d'étude de f à $\mathbb{R}_+$. La fonction f est clairement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Aussi, étudions le signe de $u_1 - u_0$. $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = \frac{1}{2}(1 + u_0^2 - 2u_0) = \frac{1}{2}(u_0 + 1)^2 > 0$ d'où par **2a.** la suite (u_n) est croissante.
- (b) On résoud alors $f(x) = x$ ce qui donne $\frac{(x-1)^2}{2} = 0$ soit $x = 1$. Ainsi, l'unique point fixe de f est 1. Comme (u_n) est une suite croissante, elle est soit convergente (admet une limite finie) soit divergente vers $+\infty$. Enfin, d'après la question **1.**, nous savons que si la suite (u_n) converge, alors c'est vers un point fixe $\ell = 1$.
- (c) Etudions donc les deux cas $|u_0| > 1$ et $|u_0| \leq 1$ séparément.
 - $|u_0| > 1$: Nous avons donc $u_0^2 > 1$ d'où $u_0^2 + 1 > 1$ et finalement $u_1 > 1$. On constate donc que, par le même raisonnement, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$. La suite (u_n) étant croissante, elle ne peut alors pas converger vers 1 d'où elle diverge.
 - $|u_0| \leq 1$. Supposons donc $|u_0| \leq 1$, c'est-à-dire $-1 \leq u_0 \leq 1$. Alors par élévation au carré nous avons $0 \leq u_0^2 \leq 1$ d'où $1 \leq u_0^2 + 1 \leq 2$ et finalement $0 \leq u_1 \leq 1$. En raisonnant par itération, nous obtenons que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1$, d'où la suite (u_n) est bornée. Comme elle est croissante et majorée, elle est convergente et d'après la question **1.**, sa limite est nécessairement 1. Aussi dans ce cas, (u_n) est une suite convergente de limite 1.
4. (a) Classiquement, la composée de fonction décroissante est une fonction croissante...
Formellement: Si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$ et donc $f \circ f(a) < f \circ f(b)$ d'où $f \circ f$ est croissante.
- (b) Déjà par la question **2** appliquée à $f \circ f$, nous savons que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones. Supposons $u_0 < u_2$. On en déduit alors que la suite (u_n) est croissante. En appliquant f qui est une fonction décroissante, nous obtenons alors $f(u_0) < f(u_2)$ soit $u_1 > u_3$ et donc la suite (u_{2n+1}) est décroissante. On prouve alors bien dans ce cas ($u_0 < u_2$) que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont de monotonies contraires. On procède de même dans le cas $u_0 > u_2$.
5. (a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{\pi}{2} \cos^2(x)$ est dérivable et nous avons $f'(x) = -\pi \cos(x) \sin(x)$. Sur $]0, \pi/2[$, les fonctions $\cos$ et $\sin$ étant strictement positives, la fonction f' est strictement négative sur $]0, \pi/2[$. Ainsi, f est-elle strictement décroissante sur $]0, \pi/2[$.
 Enfin, comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$ et $f(\pi/2) = 0$, elle réalise une bijection de $I = [0; \pi/2]$ dans lui-même. Aussi, l'intervalle I est stable par f .
- (b) Considérons la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x) - x$. g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$. Aussi, la fonction g est-elle strictement décroissante sur I . Ainsi réalise-t-elle une bijection de $[0, \pi/2]$ dans $[g(\pi/2), g(0)] = [-\pi/2; \pi/2]$; aussi ne s'annule-t-elle qu'une unique fois sur I et donc f admet un unique point fixe sur I . Remarquons que $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ d'où $\cos^2(\pi/4) = \frac{1}{2}$ et finalement $f(\pi/4) = \pi/4$ (soit $g(\pi/4) = 0$). Ainsi, $\pi/4$ est l'unique point fixe de f dans I .
- (c) Nous avons $u_0 = \pi/3$ donc comme $\cos(\pi/3) = 1/2$ nous avons $f(\pi/3) = \pi/8$. $u_2 = f(u_1) = \frac{\pi}{2} \cos^2(\pi/8) = \frac{\pi}{4}(\cos(\pi/4) + 1) = \frac{\pi}{8}(2 + \sqrt{2})$.
 Finalement $u_2 - u_0 = \frac{\pi}{8}(2 + \sqrt{2}) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{24}(6 + 3\sqrt{2} - 8) > 0$. Aussi, la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante par **4.**
- (d) Nous savons que $u_0 = \pi/3$, (u_{2n}) est croissante, (u_{2n+1}) est décroissante et que la seule limite possible de (u_n) est $\pi/4$.

Je ne détaille pas: formellement il faut démontrer via une récurrence... ce qui ne présente aucune difficulté

4.a Notation: on a envie d'écrire f^2 au lieu de $f \circ f$: ce n'est pas interdit mais c'est dangereux (confusion avec $f \times f$. Aussi faut-il bien comprendre de quoi l'on parle!

5a Pour pouvoir appliquer le théorème de la bijection, nous devons indiquer la stricte décroissance de la fonction f . Pour l'obtenir le plus simple est de considérer l'intervalle ouvert $]0, \pi/2[$ sur lequel f' est toujours strictement négative

5.b Introduire la fonction $g(x) = f(x) - x$ et étudier son sens de variation! La valeur du point fixe étant donnée, il suffit de vérifier que $f(\pi/4) = \pi/4$ (c'est bien plus simple que de trouver la valeur de x pour laquelle $f(x) = x$)

Il faut donc calculer le signe de $u_2 - u_0$ d'où déjà il nous faut calculer u_2
 Rappelons que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$

La fonction $f \circ f$ étant croissante, nous déduisons que la suite (u_{2n}) est croissante, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \geq u_0 = \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{4}$. Ainsi, la suite (u_{2n}) ne peut avoir pour limite $\pi/4$. Or, d'après **1**, si (u_n) converge c'est vers $\pi/4$ (cf **5b**). Il s'ensuit donc que (u_n) admet une sous-suite qui ne converge pas vers $\pi/4$ donc (u_n) ne converge pas vers $\pi/4$: elle est donc divergente.

Autre rédaction: Comme la suite (u_{2n+1}) est décroissante et de premier terme $u_1 = \pi/8$, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \leq \pi/8 < \pi/4$. Ainsi, cette suite converge vers une limite ℓ' vérifiant $\ell' \leq \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$. Aussi, (u_n) admet deux sous-suites convergentes vers des limites ℓ et ℓ' différentes, donc la suite (u_n) est divergente.

5d. *Raisonnement avec les sous-suites: le comprendre! Notez que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) étant monotones et à valeur dans le fermé borné I , elles sont convergentes dans I . Leurs limites doivent être des points fixes de $f \circ f$ (et non f). Il n'est pas du tout nécessaire de calculer ses limites pour conclure à la divergence de la suite (u_n)*