

EC 142 CC2: Probabilités

Mentir pour réussir (Exo 49 p375, Math'X TS, Edition 2006)

Avant le baccalauréat, on estime que les trois quarts des candidats révisent, et qu'un candidat a neuf chances sur dix s'il a révisé, et seulement deux chances sur dix s'il n'a pas révisé. Après le baccalauréat, tous les reçus font les fiers en prétendant qu'ils n'avaient même pas révisé et tous les refusés crient à l'injustice et affirment avoir travaillé jour et nuit ...

On rencontre au hasard un candidat après l'examen. On note respectivement A , R et M les événements:

A : le candidat est admis, R : le candidat a révisé M : le candidat est un menteur

1. Quelle est la probabilité que le candidat rentré soit admis et ait révisé ?
2. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un candidat refusé n'ayant pas révisé ?
3. Quelle est la probabilité que ce candidat soit admis ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir affaire à un menteur ?
5. Quelle est la probabilité que se soit un menteur sachant qu'il est refusé ?
6. Y a-t'il plus de chance d'avoir affaire à un menteur si le candidat est admis ou s'il est refusé ?
7. Peut-on dire que le fait d'être menteur augmente les chances d'être reçu ?

EC 121 Analyse de base

Cette partie comporte deux problèmes indépendants portant sur la convergence de deux suites alternées classiques

Série harmonique alternée: Exo 123 p. 216, Déclic TS

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$.
(b) En déduire que la suite (I_n) converge et précisez sa limite.
2. Calculer $I_{n+1} + I_n$ en fonction de n .
3. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on pose

$$S_n = (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - (I_3 + I_4) + \dots + (-1)^n (I_n + I_{n+1})$$

- (a) Simplifier S_n .
- (b) En déduire une expression de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}$ et déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Somme alternée des inverses des impairs (Terracher TS, edition 2002)

Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

1. Montrer que pour tout réel t , nous avons

$$1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

2. En déduire que $u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.
3. Montrer que, pour tout réel t de $[0, 1]$, on a $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$.
En déduire que $\left| u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et précisez sa limite.

EC 131 Analyse avancée

A propos de suites récurrentes

Soit I un intervalle (non d'intérieur vide) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et laissant l'intervalle I stable (ie. $f(I) \subset I$). On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que **si** la suite (u_n) est convergente et de limite ℓ , **alors** ℓ est un point fixe de f .
2. On suppose dans cette question que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (a) On suppose que $u_0 < u_1$. Montrer alors que la suite (u_n) est croissante.
 - (b) On suppose que $u_0 > u_1$: montrer alors que la suite (u_n) est décroissante.
 - (c) Que pouvez-vous dire si $u_0 = u_1$?
3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)$.
 - (a) Montrer que la suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante quel que soit le réel u_0 .
 - (b) Vérifier que f admet un unique point fixe que l'on précisera. Quelles sont les limites possibles de la suite (u_n) ?
 - (c) En distinguant les cas $|u_0| > 1$ et $|u_0| \leq 1$, étudier le comportement de la suite (u_n) selon la valeur de u_0 .
4. On suppose dans cette question que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que la fonction $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (b) En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de monotonies contraires.
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\pi}{2} \cos^2(x)$ et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = \pi/3$.
 - (a) Montrer que f est décroissante sur $I = [0, \pi/2]$ et que l'intervalle $I = [0, \pi/2]$ est stable par f .
 - (b) Montrer que $\pi/4$ est l'unique point fixe de f sur I .
 - (c) Montrer que $u_1 = \frac{\pi}{8}$ et $u_2 = \frac{\pi}{8}(2 + \sqrt{2})$.
En déduire que la suite (u_{2n}) est croissante alors que (u_{2n+1}) est décroissante.
 - (d) En déduire la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
La suite (u_n) est-elle alors convergente ?