

Correction du problème sur l'exponentielle de matrices

Partie 1.

1.a. Soient u et v deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. Alors

$$\|v \circ u\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|(v \circ u)(x)|}{|x|} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|(v \circ u)(x)|}{|u(x)|} \times \frac{|u(x)|}{|x|} \leq \|u\| \times \|v\|.$$

Ainsi nous en déduisons que $\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{L}(E)$.

En raisonnant par récurrence, on montre alors que pour tout entier naturel n , $\|u^n\| \leq \|u\|^n$.

1.b. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Par 1.a, $\left\|\frac{u^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|u^k\|}{k!}$. Utilisons le critère de d'Alembert pour montrer que la série de terme général $a_k = \frac{\|u^k\|}{k!}$ converge. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\|u\|}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi le critère de d'Alembert implique-t-il la convergence de la série $\sum a_k$, d'où la série $\sum \frac{u^k}{k!}$ est absolument convergente.

1.c. $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie complet pour toute norme définie sur $\mathcal{L}(E)$. Aussi, l'absolue convergence implique-t-elle, dans $\mathcal{L}(E)$, la convergence.

1.d. Il suffit d'identifier la matrice A avec l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ qui lui est associée. En munissant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée associée, nous déduisons la convergence uniforme de $\sum \frac{A^k}{k!}$ de 1.b.

2.a. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de u , χ_u est un polynôme annulateur de u .

2.b. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé, et soient Q_p et R_p les quotient et reste de la division euclidienne de P_p par χ_u . Nous avons alors: $P_p = Q_p \chi_u + R_p$ avec $R_p \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Ainsi, en appliquant ces polynômes à l'endomorphisme u , nous en déduisons:

$$P_p(u) = Q_p(u) \chi_u(u) + R_p(u) = R_p(u) \in \mathbb{R}_{n-1}[u].$$

2.c. $\mathbb{R}_{n-1}[u]$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, donc est un fermé de $\mathcal{L}(E)$.

2.d. Considérons à présent la suite $(\|P_n(u)\|)_{p \in \mathbb{N}}$. Celle-ci converge vers $\exp(u)$ dans $\mathcal{L}(E)$. Or, c'est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[u]$ qui est un fermé de $\mathcal{L}(E)$. Aussi en déduisons-nous $\exp(u) \in \mathbb{R}_{n-1}(u)$. Ainsi, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $Q(u) = \exp(u)$.

3.a. L'application $f_{P,Q}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie. Aussi, est-elle continue.

3.b. Notons S_p la somme partielle $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$. Cette suite converge vers $\exp(A)$. Nous déduisons de la continuité de l'application $f_{B,B^{-1}}$ la convergence de la suite $(BS_pB^{-1})_p$ vers $B \exp(A) B^{-1}$. Or, $BS_pB^{-1} = \sum_{k=0}^p B \frac{A^k}{k!} B^{-1} = \sum_{k=0}^p \frac{(BAB^{-1})^k}{k!}$ converge par définition vers $\exp(BAB^{-1})$. De l'unicité de la limite, nous obtenons $\exp(BAB^{-1}) = B \exp(A) B^{-1}$.

En utilisant la bijection $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à un endomorphisme u associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, nous obtenons:

$$\exp(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{\varphi(u)^k}{k!} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \varphi \left(\sum_{k=0}^p \frac{u^k}{k!} \right) = \varphi(\exp(u)).$$

Ainsi, la matrice de $\exp(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\exp(A)$.

3.c.

i. La diagonale de T^p est $(t_{1,1}^p; t_{2,2}^p; \dots; t_{n,n}^p)$.

- ii. Les applications $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto m_{i,j} \in \mathbb{C}$ sont continues. Aussi nous en déduisons que $\exp(T)$ est triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux de $\exp(T)$ sont $(\exp(t_{1,1}); \exp(t_{2,2}); \dots; \exp(t_{n,n}))$.
- iii. $\det(\exp(T)) = \pi_{k=1}^n \exp(t_{i,i}) = \exp(\text{tr}(T))$.
- iv. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En tant que matrice complexe, elle est trigonalisable, donc semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 1 (Critère de trigonalisation)

Un endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé.
En particulier, tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.

Ainsi, il existe une matrice de passage P telle que $T = PAP^{-1}$. La relation $\det(\exp(T)) = \exp(\text{tr}(T))$ implique alors $\det(\exp(PAP^{-1})) = \exp(\text{tr}(PAP^{-1}))$. Deux matrices semblables ayant même trace, $\text{tr}(T) = \text{tr}(A)$. Ainsi, nous obtenons: $\det(\exp(PAP^{-1})) = \exp(\text{tr}(A))$. Par 3.b. $\exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}$ et comme $\det(P^{-1}) \times \det(P) = 1$, nous en déduisons $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$. Ainsi la relation est vraie pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

4.a. Nous reconnaissons en w'_n le terme général du produit de Cauchy des séries $(\|u_p\|)$ et $(\|v_q\|)$. Puisque par hypothèse les séries $\sum \|u_n\|$ et $\sum \|v_n\|$ sont convergentes, nous en déduisons alors que la série $\sum w'_n$ est convergente et nous avons de plus

$$\sum w'_n = \left(\sum \|u_n\| \right) \times \left(\sum \|v_n\| \right).$$

4.b. De 1.a nous avons $\|u_p \circ v_q\| \leq \|u_p\| \times \|v_q\|$. Ainsi $0 \leq \|w_n\| \leq w'_n$. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, nous déduisons l'absolue convergence de la série numérique $\sum w_n$. Aussi est-elle convergente.

4.c. Soit Δ_n l'ensemble des couples d'entiers p et q vérifiant $p + q \leq n$. Soit D_n l'ensemble des couples (p, q) d'entiers avec $p \leq n$ et $q \leq n$.

$$\left\| \sum_{k=0}^{2n} w_k - \sum_{p,q \leq n} u_p \circ v_q \right\| = \left\| \sum_{(p,q) \in \Delta_{2n} \setminus D_n} u_p \circ v_q \right\| \leq \sum_{(p,q) \in \Delta_{2n} \setminus D_n} \|u_p\| \|v_q\| = \sum_{k=0}^{2n} w'_k - \sum_{p,q \leq n} \|u_p\| \times \|v_q\| \leq \sum_{k=n}^{2n} w'_k.$$

De la convergence de $\sum w'_n$, nous déduisons que c'est une suite de Cauchy. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} w'_k = 0$. Il s'ensuit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{k=0}^{2n} w_k - \sum_{p,q \leq n} u_p \circ v_q \right\| = 0$. Or, $\sum_{p,q \leq n} u_p \circ v_q = \sum_{p=0}^n u_p \times \sum_{q=0}^n v_q$. Ainsi, quand $n \rightarrow +\infty$, $\sum_{p,q \leq n} u_p \circ v_q \rightarrow (\sum u_p) \circ (\sum v_q)$. Nous déduisons alors en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ que $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) \circ (\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$.

4.d. Nous appliquons alors 4.c.

$$\exp(u) \circ \exp(v) = \sum_{k=0}^{+\infty} w_k \text{ avec } w_n = \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \circ \frac{v^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(u+v)^n}{n!}.$$

(La dernière égalité n'étant valable que quand u et v commutent). Nous avons donc $\exp(u) \circ \exp(v) = \exp(u+v)$.

4.e. Nous en déduisons alors que $\exp(u)$ est un automorphisme de E puisque $\text{Id}_E = \exp(u-u) = \exp(u) \circ \exp(-u)$ c'est-à-dire que $\exp(u)$ est inversible, donc est une bijection.

5.a. La relation 4.d. implique que φ_u est un morphisme de $(\mathbb{R}; +)$ dans $(GL(E), \circ)$.

5.b. La série de fonction $\sum \frac{t^n u^n}{n!}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ puisque si K compact, alors K est borné par $M > 0$ et nous avons $\|\frac{t^n u^n}{n!}\| \leq \frac{M^n \|u\|^n}{n!}$. Or, le second membre est le terme général d'une série convergente.

5.c. De la continuité des fonctions $t \mapsto \frac{t^n u^n}{n!} \in \mathcal{L}(E)$, nous déduisons la continuité sur tout compact de $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \exp(tu) \in \mathcal{L}(E)$ (théorème sur la continuité de la série de fonctions). Il s'ensuit alors que φ_u est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

6.a. On utilise 3.b. ce qui prouve directement que $\exp(u)$ est diagonale dans la base $\mathcal{B}'$.

6.b. Si $u \in \mathcal{S}^+$, alors u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}'$. Si λ est une valeur propre associée au vecteur propre x , de $\langle u(x); x \rangle = \lambda \|x\|^2 > 0$, nous déduisons $\lambda > 0$.

Réciproquement, supposons que les valeurs propres de u sont symétriques et plaçons-nous dans la base *orthonormale* $\mathcal{B}'$ dans laquelle u est diagonal. Ainsi, $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ et $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i > 0$.

Soit $x = \sum x_i e_i$ un vecteur de E . Alors $u(x) = \sum x_i u(e_i) = \sum \lambda_i x_i e_i$, d'où $\langle u(x); x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ car $\mathcal{B}'$ orthonormale.

6.c. Soit $\mathcal{B}'$ une base orthogonale dans laquelle u est diagonal. Alors, dans cette base, $\exp(u)$ est aussi diagonale, et sa diagonale est composée d'éléments strictement positifs: e^{λ_i} . Il s'ensuit alors que $\exp(u)$ est définie positive (pour $x = \sum x_i e_i$, nous avons bien $\langle u(x); x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$).

6.d. Nous avons $u \circ \exp(u) = \exp(u) \circ u$. Or, si $\exp(v) = \exp(u)$, on en déduit que u et $\exp(v)$ commutent.

Si u et $\exp(v)$ commutent, alors il existe une base orthonormale dans laquelle ils sont tous deux sous forme diagonale. Notons $\mathcal{B}''$ cette base et posons $M_{\mathcal{B}''}(u) = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $M_{\mathcal{B}''}(\exp(v)) = \text{Diag}(e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, \dots, e^{\mu_n})$. D'après 3.c. e^u est alors une matrice diagonale dans la base $\mathcal{B}''$ et nous avons: $M_{\mathcal{B}''}(\exp(u)) = \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. De l'égalité $\exp(u) = \exp(v)$, nous déduisons $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $e^{\lambda_i} = e^{\mu_i}$ et par suite $\lambda_i = \mu_i$. Ainsi, les endomorphismes u et v sont égaux.

Proposition 2 (Critère de codiagonalisation)

Une famille (u_k) d'endomorphismes diagonalisables d'un espace de dimension finie E est codiagonalisable si et seulement pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, u_i et u_j commutent.

6.e. Reste à montrer que $\exp$ est surjective. Soit $v \in \mathcal{S}^+$. v est diagonalisable dans une base orthonormale, et dans cette base, $v = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Il suffit alors de considérer l'endomorphisme u qui, dans cette base, a pour matrice $\text{diag}(\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_n))$. On a alors $\exp(u) = v$ d'où $\exp$ surjectif.

Partie 2.

1.a. De $u = g \circ \exp(s)$, nous déduisons $u^* = (\exp(s))^* \circ g^*$. L'application $f \mapsto f^*$ étant continue, nous en déduisons $\exp(s)^* = \exp(s^*)$. Ainsi, $u^* \circ u = \exp(s^*) \circ (g^{-1}) \circ g \circ \exp(s) = \exp(s^*) \circ \exp(s)$. Puisque $s \in \mathcal{S}$, s est symétrique donc autoadjoint, et s^* donc, comme s commute avec lui-même, nous avons: $u^* \circ u = \exp(s) \circ \exp(s) = \exp(2s)$.

Proposition 3 (Quelques rappels sur les endomorphismes adjoints)

Si $i \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme f^* qui satisfait $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x | f(y) \rangle = \langle f^*(x) | y \rangle$. L'application qui à un endomorphisme lui associe son adjoint est un automorphisme d'espaces vectoriels involutif. Nous avons les relations suivantes:

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*; \text{ et } (f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$$

La matrice de f^* dans une base orthonormale de E est la transposée de la matrice de f dans cette base. Nous avons:

$$\ker(f^*) = (\operatorname{Im}(f))^\perp \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f^*) = (\ker(f))^\perp$$

F est un s.e.v stable par $f \Leftrightarrow F^\perp$ est un s.e.v. stable par f^* .

1.b. Soit $u \in E$. Par 1.a. il est nécessaire que $u^* \circ u = \exp(2s)$. Ainsi, posons $s = \frac{1}{2} \ln(u \circ u^*)$ (la fonction $\ln$ étant celle définie en I.6.e). Ensuite, posons $g = u \circ \exp(-s)$ et vérifions que $g \in O(E)$.

$$g \circ g^* = u \circ \exp(-s) \circ \exp(-s) \circ u^* = u \circ \exp(-2s) \circ u^* = u \circ (u^* \circ u)^{-1} \circ u^* = Id_E$$

L'unicité de la décomposition provient de la condition nécessaire $u^* \circ u = \exp(2s)$. Ainsi, s est unique et par suite g l'est aussi.

1.c. Montrons déjà que u est un automorphisme (pour pouvoir appliquer 1.b.). Si u n'est pas un automorphisme, alors il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Cela contredit alors la relation $\|x\| \leq \|u(x)\|$. Aussi celle-ci implique que u est un automorphisme.

Par 1.b. il existe donc un unique couple $(g, s) \in O(E) \times \mathcal{S}$ tel que $u = g \circ \exp(s)$. Nous avons alors: $|\det(u)| = |\det(g \circ \exp(s))| = |\det(g)| \times |\det(\exp(s))| = |\det(g)| \times |\det(\operatorname{tr}(s))|$. De $g \in O(E)$ on a $|\det(g)| = 1$. Enfin, dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale dans laquelle s est la diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Nous avons $|u(e_i)| = |e^{\lambda_i} e_i| \geq |e_i| = 1$. Ainsi, nous en déduisons $e^{\lambda_i} \geq 1$ et donc $\operatorname{tr}(s) \geq 1$ et donc $|\det(u)| \geq 1$.

2. $\langle j(x); x \rangle = \langle x' - x''; x' + x'' \rangle = \|x'\|^2 - \|x''\|^2 = Q(x)$ puisque $\langle x'; x'' \rangle = 0$.

3. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des endomorphismes u de E tels que $\forall x \in E, Q(u(x)) = Q(x)$.

3.a. $u \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle j(x); x \rangle = \langle j \circ u(x); u(x) \rangle \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle j(x); x \rangle = \langle u^* \circ j \circ u(x); x \rangle$. L'endomorphisme $u^* \circ j \circ u - j$ étant symétrique et s'annulant pour tout x , nous en déduisons que $u^* \circ j \circ u - j = 0$.

3.b. $\det(u^* \circ j \circ u - j) = 0$ donc $\det(u^* \circ j \circ u) = \det(j)$. Il s'ensuit donc que $\det(u^*) \det(u) = 1 = \det(u^* \circ u)$. Or, $\det(u^*) = \det(u)$, d'où $\det(u) \in \{-1; 1\}$.

3.c.

Méthode Pour montrer qu'un ensemble $\mathcal{H}$ est un groupe, on montre quasi systématiquement que c'est un sous-groupe d'un certain groupe G le contenant ($\mathcal{H} \subset G$). Il suffit alors de vérifier qu'il est non vide (i.e. contient l'élément neutre du groupe G), que si $u \in \mathcal{H}$ alors $u^{-1} \in \mathcal{H}$ et enfin que si u et v sont dans $\mathcal{H}$, alors le produit (ici composition) $v \circ u$ est dans $\mathcal{H}$

De manière évidente, $Id \in \mathcal{H}$. De plus, les éléments de $\mathcal{H}$ ayant un déterminant non nul, ils appartiennent à $GL(E)$. Soit à présent u et v deux éléments de $\mathcal{H}$. Alors $\forall x \in E, Q(v \circ u(x)) = Q(u(x)) = Q(x)$ donc $v \circ u \in \mathcal{H}$. De plus, si $u \in \mathcal{H}$, alors $Q(x) = Q(u \circ u^{-1}(x)) = Q(u^{-1}(x))$, et donc $u^{-1} \in \mathcal{H}$. Ainsi, nous en déduisons bien que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $GL(E)$. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

4.a. $(Q(x) = |x|^2) \Rightarrow (|x'|^2 - |x''|^2 = |x'|^2 + |x''|^2 \text{ d'où } x \in E')$

4.b. De même, $Q(x) = -|x|^2$ si et seulement si $x \in E''$.

5. Si $g \in \mathcal{H} \cap O(E)$ alors $j \circ g = g \circ j$. Pour $x \in E'$, nous avons: $j(x) = x$ et $j(g(x)) = g(x)$ d'où $g(x) \in E'$. De même, $g(E'') \subset E''$. Ainsi, puisque g automorphisme, nous obtenons: $g(E') = E'$ et $g(E'') = E''$.

Réciproquement, si $g \in O(E)$ tel que $g(E') = E'$ et $g(E'') = E''$, montrons $g \in \mathcal{H}$. Soit $x \in E$ et $x = x' + x''$ sa décomposition sur E' et E'' . Nous avons alors: $j(g(x')) = g(x')$ car $g(x') \in E'$ et $g(j(x')) = g(x')$.

De même, $j(g(x'')) = -g(x'')$ et $g(j(x'')) = -g(x'')$. Aussi en déduisons-nous l'égalité $j \circ g = g \circ j$ et donc l'équivalence demandée.