

Solution Examen: EC 121 Méthodes en Analyse

Partie I: Condition nécessaire pour que f soit inversible

1. Supposons donc f strictement croissante, et soient x et y eux éléments de I avec $x \neq y$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x < y$: aussi, par stricte croissance de f , nous en déduisons que $f(x) < f(y)$ d'où f est injective.
2. (a) Considérons donc la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_3) - f(tx_2 + (1-t)x_4)$. Les fonctions $t \mapsto tx_1 + (1-t)x_3$ et $t \mapsto tx_2 + (1-t)x_4$ sont continues (car polynomiales) à valeurs respectivement dans $[x_1; x_3]$ et $[x_2; x_4]$. Aussi, par le théorème de composition sur les fonctions continues, puisque f est continue sur I donc sur ces deux intervalles, nous en déduisons que la fonction g est continue sur $[0; 1]$. Or, $g(0) = f(x_3) - f(x_4) \leq 0$ et $g(1) = f(x_1) - f(x_2) \geq 0$: aussi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous en déduisons que la fonction g s'annule sur $[0; 1]$: soit $t_0 \in [0; 1]$ tel que $g(t_0) = 0$.
 (b) Soit donc les réels $x_5 = t_0x_1 + (1-t_0)x_3$ et $x_6 = t_0x_2 + (1-t_0)x_4$. Comme $x_5 \in [x_1; x_3]$ et $x_6 \in [x_2; x_4]$, nous en déduisons que $x_5, x_6 \in I$ (puisque I est un intervalle). En partant de $g(t_0) = 0$, nous obtenons alors $f(x_5) - f(x_6) = 0$ soit $f(x_5) = f(x_6)$. Or, si $x_5 = x_6$, nous aurions $t_0(x_1 - x_2) + (1-t_0)(x_3 - x_4) = 0$ soit $t_0(x_1 - x_2) = (1-t_0)(x_4 - x_3)$. Cette égalité est impossible puisque le membre de droite est négatif ($x_1 < x_2$) et le membre de gauche est positif ($x_3 < x_4$). Il s'ensuit donc que $x_5 \neq x_6$: aussi, nous en déduisons que la fonction f n'est pas injective.
3. On admet que, par un raisonnement similaire à celui de la question 1., on montre que toute fonction strictement décroissante est injective: aussi, la question 1. implique que toute fonction strictement monotone est injective. Pour montrer l'implication réciproque (à savoir si f est injective, alors f est strictement monotone), nous allons raisonner par contraposée: lorsque f n'est pas strictement monotone, nous avons établi dans la question 2.b que f n'était pas injective. Aussi, nous avons bien le théorème souhaité.

Partie II: Propriétés des fonctions réciproques

1. On suppose donc f strictement croissante sur I . Soient $y < y'$ deux éléments de $J = f(I)$ et soient x et x' les deux éléments de I tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Supposons par l'absurde que $x \geq x'$: alors par stricte croissance de f , nous aurions $f(x) \geq f(x')$, ce qui est donc absurde: aussi, nous avons nécessairement $x < x'$, soit $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$ et donc f^{-1} est une fonction strictement croissante sur J .
2. (a) On suppose que g est strictement croissante sur $[a; b]$, donc $g([a; b]) = [g(a); g(b)]$.
 Considérons $\mathcal{A} = \{g(x); x \in]c; b]\}$ pour $c \in]a; b[$. L'ensemble $\mathcal{A}$ est non-vide car l'intervalle $]c; b]$ est non vide (par exemple $g(b) \in \mathcal{A}$ par stricte croissance de g). De part la croissance de g sur $[a; b]$, nous savons que $\mathcal{A}$ est minoré par $g(c)$: aussi, l'ensemble $\mathcal{A}$ est-il sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$, donc il admet une borne inférieure L .
 De la majoration $g(c) \leq g(x)$, vraie pour tout $x > c$, nous déduisons que $g(c) \leq L$.
 (b) Raisonnons par l'absurde en supposant que $g(c) < L$. Par stricte croissance de g , la valeur $\frac{L + g(c)}{2}$ n'est jamais atteinte par g , ce qui contredit le fait que $g([a; b])$ est un intervalle. Aussi, nous en déduisons que $g(c) = L$, et donc la fonction g est continue à droite en a .
 (c) Par le même raisonnement, on montre que g est continue à gauche en c et comme les deux limites sont égales à $g(c)$, il s'ensuit que g est continue en c . Comme c quelconque sur $]a : b[$, on en déduit que g continue sur $]a; b[$. Enfin, g possède une limite à droite en a vérifiant $g(a) = \lim_{a^+} g(x)$ d'où g est continue à droite en a . De même, on montre qu'elle est continue à gauche en b d'où g est continue sur $[a; b]$.
3. Nous savons que la fonction f est strictement croissante: aussi, par question I.1, la fonction f^{-1} est aussi strictement croissante sur $J = f(I)$, et à valeurs dans I , c'est-à-dire que $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle. Aussi, d'après la question précédente, f^{-1} est continue sur J .
4. (a) Nous avons:
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f \circ f^{-1}(y) - f \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} = \frac{1}{\Delta(f^{-1}(y))}.$$

- (b) La fonction f est dérivable sur I , donc f est continue sur I et par la question précédente, f^{-1} est continue sur J . Aussi, $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) = f'(x_0)$. Comme ce dernier est non nul par hypothèse, le théorème de composition des limites permet d'écrire

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = (f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

On obtient ainsi bien le résultat souhaité.

5. (a) Supposons f impaire, ie. I est donc un intervalle centré en 0. Comme $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$, nous en déduisons que $J = f(I)$ est aussi un intervalle centré en 0. Soient alors $y \in J$ (et donc $-y \in J$). Il existe donc $x \in I$ tel que $f(x) = y$. Aussi, $-y = -f(x) = f(-x)$ puisque f est impaire, d'où $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$: la fonction f est donc elle aussi impaire.
- (b) Si l'on suppose f paire, alors rien ne dit que l'intervalle $J = f(I)$ soit centré en 0. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$, mais à valeur dans $\mathbb{R}_+$: aussi, sa fonction réciproque ($x \mapsto \sqrt{x}$) ne peut-elle être paire.
6. (a) Soient x, x' deux éléments de I , et désignons par y, y' respectivement les éléments de J vérifiant $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Si f est convexe, alors nous avons $\forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x')$, soit encore $f(\lambda f^{-1}(y) + (1 - \lambda)f^{-1}(y')) \leq \lambda y + (1 - \lambda)y'$. En composant cette dernière inégalité par f^{-1} qui est strictement croissante (car f l'est), nous en déduisons que $\lambda f^{-1}(y) + (1 - \lambda)f^{-1}(y') \leq f^{-1}(\lambda y + (1 - \lambda)y')$, et donc f^{-1} est une fonction concave.
- (b) Par le même raisonnement, si cette fois f est strictement croissante et concave, on en déduit que f^{-1} est convexe.
- (c) Si f est strictement décroissante et convexe, alors f^{-1} sera aussi strictement décroissante et convexe.
- (d) De même, si f strictement décroissante et concave, alors f^{-1} est stictement décroissante et concave.

Partie III: Applications

1. Considérons donc la fonction $\cos$ définie sur $[0; \pi]$ et à valeurs dans $[-1; 1]$. Nous savons que $\cos$ est continue et dérivable sur $[0; \pi]$ et qu'elle y est strictement décroissante: aussi, elle réalise une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. Sa fonction réciproque est continue, strictement décroissante. Comme la dérivée de la fonction $\cos$ ne s'annule pas sur $]0; \pi[$, nous en déduisons que la fonction réciproque $\arccos$ est dérivable et de dérivée vérifiant $\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))}$. Or, comme pour tout réel $y \in]0; \pi[$, $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$ nous en déduisons que $\sin(y) = \sqrt{1 - \cos^2(y)}$ (sur $]0; \pi[$, le sinus est en effet positif). Il s'ensuit donc que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$, d'où $\arccos'(x) = \frac{1}{-\sqrt{1 - x^2}}$.
2. De même, la fonction sinus définie sur $[-\pi/2; \pi/2]$ est strictement croissante, continue et dérivable, de dérivée $-\cos(x)$ ne s'annulant pas sur $] -\pi/2; \pi/2[$. Aussi, nous en déduisons que $\sin$ réalise une bijection de $[-\pi/2; \pi/2]$ dans $[-1; 1]$: soit $\arcsin$ sa fonction réciproque. Cette fonction est donc strictement croissante, continue, dérivable sur $] -1; 1[$ et l'on a $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.