

**Examen: EC 121 Méthodes en Analyse**  
**Lundi 15 décembre, durée 2h**

*Le sujet comporte deux exercices, chacun sur 15 points. Si le candidat détecte ce qui lui semble être une erreur, il l'indique sur sa copie et précise les initiatives qu'il est amené à prendre pour poursuivre.*

★ ★ ★

### Exercice 1: Etude de fonctions réciproques

Dans ce problème, on désigne par  $I$  un intervalle réel non réduit à un point, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction définie sur  $I$ . On désigne par  $J = f(I)$ . On rappelle que la fonction  $f$  est dite *invertible* si elle réalise une bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$  ou encore s'il existe une fonction  $g : J \rightarrow I$  telle que  $f \circ g = Id_J$  et  $g \circ f = Id_I$ .

#### Partie I: Condition nécessaire pour que $f$ soit invertible

1. On suppose dans cette question que  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $I$ : montrer que  $f$  est injective sur  $I$ .
2. On suppose à présent que  $f$  est une fonction continue non monotone. Aussi, on suppose l'existence de quatre réels,  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$  dans  $I$  tels que  $f(x_1) \geq f(x_2)$  et  $f(x_3) \leq f(x_4)$ .
  - (a) Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $[0, 1]$  par  $g(t) = f(tx_1 + (1-t)x_3) - f(tx_2 + (1-t)x_4)$  s'annule sur  $[0, 1]$ . On désigne par  $t_0 \in [0, 1]$  un réel vérifiant  $g(t_0) = 0$ .
  - (b) En considérant les réels  $x_5 = t_0x_1 + (1-t_0)x_3$  et  $x_6 = t_0x_2 + (1-t_0)x_4$ , montrer que  $f$  n'est pas injective.
3. Dédurre des question précédente le théorème suivant: Soit  $f$  une fonction continue.  
 *$f$  est injective sur  $I$  si et seulement si  $f$  est strictement monotone sur  $I$ .*

#### Partie II: Propriétés des fonctions réciproques

Dans toute cette partie, on désigne par  $f : I \rightarrow J$  une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle  $I$ , à valeurs dans  $J = f(I)$ . D'après la partie précédente, elle est donc invertible: nous noterons  $f^{-1}$  sa fonction réciproque.

1. Montrer que  $f^{-1}$  est une fonction strictement croissante.
2. On suppose que  $g$  est une fonction strictement croissante sur l'intervalle  $[a; b]$ .
  - (a) Soit  $c \in ]a; b[$ . Montrer que l'ensemble  $\mathcal{A} = \{g(x) | x \in ]c; b]\}$  admet une borne inférieure, notée  $L$ . En déduire que  $g$  admet  $L$  pour limite à droite en  $c$ , et que  $g(c) \leq L$ .
  - (b) On suppose de plus que  $g([a, b])$  est un intervalle. En déduire que  $g$  est continue à droite en  $c$ .
  - (c) Montrer le théorème suivant:  
 Si  $g$  est une fonction strictement monotone sur  $[a; b]$  telle que  $g([a; b])$  est un intervalle, alors  $g$  est continue sur  $[a; b]$ .
3. Montrer que la fonction  $f^{-1}$  est continue sur  $J$ .

4. On suppose à présent que la fonction  $f$  est de plus dérivable sur  $I$  et que  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ . Soit  $y_0 \in J$ : on pose  $x_0 \in I$  tel que  $f(x_0) = y_0$ . On définit alors la fonction  $\Delta$  sur  $I \setminus \{x_0\}$  par  $\Delta(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .
- (a) Montrer que pour tout  $y \in J \setminus \{y_0\}$ ,  $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\Delta(f^{-1}(y))}$ .
- (b) En déduire que la fonction  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$ , avec  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ .
5. (a) Montrer que si  $f$  est impaire, alors  $f^{-1}$  l'est aussi.  
 (b) Pensez-vous que lorsque  $f$  est paire, alors  $f^{-1}$  est aussi nécessairement paire ?
6. (a) Montrer que si  $f$  est strictement croissante et convexe, alors  $f^{-1}$  est concave.  
*Pour les trois questions suivantes, on pourra donner la réponse en s'inspirant du résultat précédent sans justification*  
 (b) Que dire de  $f^{-1}$  si l'on sait que  $f$  est strictement croissante et concave cette fois ?  
 (c) A présent, on suppose  $f$  strictement décroissante et convexe: que dire de  $f^{-1}$  ?  
 (d) Pour terminer, que pouvez-vous dire de  $f^{-1}$  lorsque  $f$  est strictement décroissante et concave ?

### Partie III: Applications

Dans cette partie, on suppose connues les propriétés des fonctions sinus et cosinus (sens de variation, continuité, dérivabilité...), mais aucune connaissance préalable sur les fonctions *arccos* et *arcsin* ne devra être utilisée.

1. On considère la fonction cosinus définie sur  $[0; \pi]$  et à valeurs dans  $[-1; 1]$ . On suppose que cette fonction est continue et dérivable sur  $[0, \pi]$ : montrer qu'elle admet une application réciproque, notée *arccos* et précisez (rapidement) ses propriétés. En particulier, montrer que *arccos* est dérivable sur  $] - 1; 1[$  et de dérivée égale à  $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. On considère la fonction sinus définie sur  $[-\pi/2; \pi/2]$  et à valeurs dans  $[-1; 1]$ . On suppose que cette fonction est continue et dérivable sur  $[0, \pi]$ : montrer qu'elle admet une application réciproque, notée *arcsin* et précisez (rapidement) ses propriétés. En particulier, montrer que *arcsin* est dérivable sur  $] - 1; 1[$  et de dérivée égale à  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$