

Developpement en fractions continues Solution.

Jean-François Culus ¹
I.U.F.M. de Martinique

Partie I: Etude d'un exemple.

1. La suite ρ est bien définie pour tout entier naturel n . Montrons déjà que la suite ρ ainsi définie est minorée par 1. Pour ce faire, procédons par récurrence: posons $\mathcal{H}_n$ la propriété $\rho_n \geq 1$.

$\rho_0 = 1$ et donc $\rho_1 = \frac{3}{2} \geq 1$: les hypothèses $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont donc vraies.

Soit à présent n un entier positif, et supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie. Alors $\rho_{n+1} = 1 + \frac{1}{\rho_n}$, ce qui implique bien $\rho_{n+1} \geq 1$. Ainsi, nous avons bien $\forall n \geq 0, \rho_n \geq 1$.

Méthode Pour étudier le comportement d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, on résoud déjà l'équation $\ell = f(\ell)$. Pour établir la convergence de (u_n) vers ℓ , il faut alors exprimer $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$.

Recherchons les points fixes de f : nous avons $f(\ell) = \ell$, si et seulement si ℓ est une racine de l'équation du second degré $\ell^2 - \ell - 1 = 0$. Les solutions de ce trinôme sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Comme nous savons que $\rho_n \geq 1$ pour tout entier naturel n , nous déduisons que la seule limite possible de ρ est $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Pour tout entier n , nous avons: $\rho_{n+1} - \ell = \frac{1}{\rho_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - \rho_n}{\ell \rho_n}$. Pour $n \geq 1$ nous avons: $|\rho_{n+1} - \ell| < \frac{1}{\ell} |\rho_n - \ell|$. Par récurrence implicite, nous obtenons: $\forall n \in \mathbb{N}, |\rho_n - \ell| < \frac{1}{\ell^n} |\rho_0 - \ell|$.

2. Posons $b_{-1} = 1$. Ainsi, $b_1 = b_n + b_{-1} = 1$ et donc la suite $(b_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à l'ensemble $E(u)$ (avec u la suite constante à 1). De plus, nous avons $b_{-1} = a_0$ et $b_0 = a_1$: or, puisqu'il y a unicité des suites a et b , nous en déduisons que la suite $(b_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ est égale à la suite a . Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_{n+1}$.
3. Les racines de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ sont ℓ et $\frac{-1}{\ell}$ (*Pensez à la forme $X^2 - SX + P = 0$*). Ainsi, nous en déduisons l'existence de deux réels λ et μ tels que $b_n = \lambda \ell^n + \mu \left(\frac{-1}{\ell}\right)^n$ avec (conditions initiales) $\lambda + \mu = b_0 = 0$ et $\lambda \ell - \frac{\mu}{\ell} = 1$.

Méthode On rappelle que l'ensemble des suites solutions de cette relation de récurrence d'ordre 2 est un espace vectoriel de dimension 2. Or, les suites $(\ell^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{-1}{\ell^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont solutions de cette relation de récurrence et sont linéairement indépendantes: aussi, toute suite solution est de la forme $\lambda \ell^n + \mu \left(\frac{-1}{\ell}\right)^n$. Pour déterminer λ et μ , il suffit de vérifier les conditions initiales de la suite b .

Le système $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \ell - \frac{\mu}{\ell} = 1 \end{cases}$ conduit à $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{\ell + \frac{1}{\ell}} \\ \mu = -\frac{1}{\ell + \frac{1}{\ell}} \end{cases}$. Ainsi déduisons-nous que $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \lambda \times \left(\ell^n - \left(\frac{-1}{\ell}\right)^n\right)$.

4. De la relation **I.2.**, nous obtenons:

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\ell^n - \left(\frac{-1}{\ell}\right)^n}{\ell^{n+1} - \left(\frac{-1}{\ell}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\ell} \frac{\ell^n - \left(\frac{-1}{\ell}\right)^n}{\ell^n - \left(\frac{-1}{\ell}\right)^{n+2}} \rightarrow \frac{1}{\ell}.$$

Ainsi la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$.

5. Montrons cette formule par récurrence sur n . Au rang $n = 0$, nous avons $\frac{a_2}{b_2} = 1 = \frac{1}{\rho_0}$, donc la formule est vraie au rang 0. Supposons-là vraie au rang n et démontrons-là au rang $n + 1$. Nous avons:

$$\frac{a_{n+3}}{b_{n+3}} = \frac{b_{n+2}}{b_{n+2} + b_{n+1}} = 1 + \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = 1 + \frac{b_{n+2}}{a_{n+2}} = 1 + \frac{1}{\rho_{n+2}} = \rho_{n+3}.$$

L'écriture sous forme de fractions continues se démontre en itérant la relation de récurrence vérifiée par ρ_{n+1} . En effet, $\rho_{n+1} = 1 + \frac{1}{\rho_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\rho_{n-1}}} = \dots$.

¹jean-francois.culus@iufm-martinique.fr

Partie II: Fraction continue associée à une suite strictement positive.

1. Soient x et y deux suites de $E(u)$, et soient λ et μ deux réels. Alors la suite $\lambda x + \mu y$ vérifie, au rang $n + 2$, la relation de récurrence suivante:

$$\lambda x_{n+2} + \mu y_{n+2} = \lambda(u_n x_{n+1} + x_n) + \mu(u_n y_{n+1} + y_n) = u_n(\lambda x + \mu y)_{n+1} + (\lambda x + \mu y)_{n+1}.$$

Il s'ensuit alors que la suite $\lambda x + \mu y \in E(u)$. Aussi $E(u)$ est-il un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Les suites a et b sont des éléments de $E(u)$ linéairement indépendantes (le déterminant $a_0 b_0 - a_1 b_1$ est non nul). De plus, pour toute suite $x \in E(u)$, nous avons $x = x_0 a + x_1 b$ (i.e. la suite $y = x - (x_0 a + x_1 b)$ est nulle). Aussi $\forall x \in E(u)$, x est combinaison linéaire de a et b , d'où $E(u)$ est un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension 2.

2. **Méthode** On ne peut pas montrer par récurrence cette propriété qui est trop faible. Il faut alors en montrer une plus forte, c'est à dire que $\forall(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe une suite telle que $(\sigma_p^{(p)}; \sigma_{p+1}^{(p)}) = (\alpha; \beta)$. L'existence d'une telle suite au rang p permet d'assurer l'existence d'une nouvelle au rang $p + 1$ qui vérifie la même propriété.

Montrons par récurrence sur p que, $\forall(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe une suite telle que $(\sigma_p^{(p)}; \sigma_{p+1}^{(p)}) = (\alpha; \beta)$. Au rang $p = 0$, nous pouvons considérer la suite $x = \alpha a + \beta b$. Supposons à présent la propriété vraie au rang n . Alors $\sigma_{p+1}^{(p)} = u_{p+1} \sigma_p^{(p)} + \sigma_{p-1}^{(p)}$. Or, par hypothèse de récurrence, il existe une suite $\sigma^{(p)}$ telle que $\sigma_p^{(p)} = \alpha$ et $\sigma_{p+1}^{(p)} = \beta - u_{p+1} \alpha$. Il s'ensuit alors que cette suite vérifie la propriété $(\sigma_p^{(p)}; \sigma_{p+1}^{(p)}) = (\alpha; \beta - u_{p+1} \alpha)$. Ainsi, par le théorème de la récurrence, nous en déduisons l'existence, pour tout couple $(\alpha; \beta)$ d'une suite de $E(u)$ vérifiant $(\sigma_p^{(p)}; \sigma_{p+1}^{(p)}) = (\alpha; \beta)$. En particulier pour $(\alpha; \beta) = (1; 0)$.

3. Par **II.2.** nous savons qu'il existe des suites $\sigma^{(p-1)}$, $\sigma^{(p)}$ et $\sigma^{(p+1)}$ telles que $(\sigma_{p+1}^{(p+1)}; \sigma_{p+2}^{(p+1)}) = (1; 0)$. Considérons la suite $X = -u_p \sigma^{(p)} + \sigma^{(p-1)}$. Etant combinaison linéaire de suites de $E(u)$, nous en déduisons que $X \in E(u)$.

Méthode Pour montrer que la suite X est égale à la suite $\sigma^{(p+1)}$, nous allons calculer les indices X_{p+1} et X_{p+2} ; si nous trouvons 1 et 0, comme $X \in E(u)$, se sera la suite $\sigma^{(p+1)}$.

$$X_{p+1} = -u_p \sigma_{p+1}^{(p)} + \sigma_{p+1}^{(p-1)} = -u_p \times 0 + (u_{p-1} \sigma_{p-1}^{(p-1)} + \sigma_{p-1}^{(p-1)}) = 1.$$

D'autre part, nous avons:

$$X_{p+2} = -u_p \sigma_{p+2}^{(p)} + \sigma_{p+2}^{(p-1)} = -u_p (u_p \sigma_{p+1}^{(p)} + \sigma_p^{(p)}) + (u_p \sigma_{p+1}^{(p-1)} + \sigma_p^{(p-1)}) = -u_p + u_p = 0$$

Ainsi identifions-nous la suite X avec la suite $\sigma^{(p+1)}$ de $E(u)$.

4. (a) Nous avons: $\rho_k^{(n)} = \frac{\sigma_k^{(n)}}{\sigma_{k-1}^{(n-1)}}$. Or, par définition de la suite $\sigma^{(n-1)}$, nous avons $\sigma_{n-1}^{(n-1)} = 0$ et $\sigma_n^{(n-1)} = 0$.

Ainsi, par la relation de récurrence vérifiée par $\sigma^{(n-1)}$, nous en déduisons que si $k > n$, alors $\sigma_k^{(n-1)} > 0$ (la suite u étant strictement positive). Ainsi la suite $\rho_k^{(n)}$ est-elle bien définie pour $k > n$.

- (b) Soit $k > n + 1$. Nous avons: $\rho_k^{(n)} = \frac{\sigma_k^{(n)}}{\sigma_{k-1}^{(n-1)}} = \frac{\sigma_k^{(n)}}{\sigma_k^{(n-1)} + u_n \sigma_k^{(n)}} = \frac{1}{u_n + \frac{\sigma_k^{(n+1)}}{\sigma_k^{(n)}}}$ (d'après la formule établie en **4.b.**)

Il s'ensuit alors que $\rho_k^{(n)} = \frac{1}{u_n + \rho_k^{(n+1)}}$.

- (c) Nous avons $\rho_{n+2}^{(0)} = \frac{\sigma_{n+2}^{(0)}}{\sigma_{n+1}^{(-1)}}$. Or, $\sigma_{n+2}^{(-1)} = b_{n+2}$ (on a en effet posé par hypothèse $\sigma^{(-1)} = b$) et $\sigma_{n+2}^{(0)} = a_{n+2}$ puisque σ_0 est l'unique suite de $E(u)$ vérifiant $\sigma_0^0 = 1$ et $\sigma_1^0 = 0$: nous reconnaissons alors la suite a . Il s'ensuit que $\rho_{n+2}^{(0)} = \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}$. Par suite, en itérant l'écriture obtenue en **4.b.** nous obtenons:

$$\frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} = \frac{1}{u_0 + \frac{1}{u_1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{u_{n-1} + \frac{1}{u_n}}}}} \quad (\text{il y a } n + 1 \text{ barres de fractions})$$

5. (a) $a_{n+1} b_n - a_n b_{n+1} = (u_{n-1} a_n + a_{n-1}) b_n - a_n (u_{n-1} b_n + b_{n-1}) = -(a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n)$. On note $\gamma_n = a_{n+1} b_n - a_n b_{n+1}$: nous avons $\gamma_0 = -1$ et par récurrence (simple) on a $\gamma_n = (-1)^{n+1}$.

- (b) Nous pouvons déjà remarquer que, puisque la suite b vérifie la relation de récurrence $b_{n+2} = u_n b_{n+1} + b_n$ et que u_n est toujours positifs, la suite (b_n) est croissante à partir du rang 2. De plus, nous avons $b_2 = u_0 b_1 + b_0 = u_0$ et $b_3 = u_1 b_2 + b_1$. Ainsi, posons $\alpha = \min(1; u_0)$. Alors $b_2 \geq \alpha$, $b_3 \geq u_1 \alpha + \alpha = \alpha(u_1 + 1)$. Par itération du processus, nous obtenons que $\forall n \geq 2$, $b_n \geq \alpha(u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_1 + 1)$. Or, la suite (u_n) ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge (vers $+\infty$ puisque les suites partielles sont strictement croissantes). Aussi la suite (b_n) est-elle divergente vers $+\infty$.

Montrons que les suites $(\frac{a_{2n}}{b_{2n}})$ et $(\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}})$ sont adjacentes.

$$\begin{aligned} \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} - \frac{a_{2n}}{b_{2n}} &= \frac{a_{2n+2}b_{2n} - a_{2n}b_{2n+2}}{b_{2n+2}b_{2n}} \\ &= \frac{1}{b_{2n}b_{2n+2}} ((u_{2n}a_{2n+1} + a_{2n})b_{2n} - a_{2n}(u_{2n}b_{2n+1} + b_{2n})) \\ &= \frac{1}{b_{2n}b_{2n+2}} u_{2n} (a_{2n+1}b_{2n} - a_{2n}b_{2n+1}) = \frac{(-1)^{2n+1}}{b_n b_{n+1}} < 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la suite $(\frac{a_{2n}}{b_{2n}})$ est décroissante. On montre de même la croissance de la suite $\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}}$. Enfin, comme nous savons que $a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1} = (-1)^n$, d'où en divisant cette relation par $b_nb_{n+1} > 0$, nous obtenons: $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{b_nb_{n+1}}$, nous en déduisons que la différence de ces deux suites tends vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Les suites $(\frac{a_{2n}}{b_{2n}})_{n \geq 1}$ et $(\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}})_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

- (c) Les suites extraites $(\frac{a_{2n}}{b_{2n}})_{n \geq 1}$ et $(\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}})_{n \geq 1}$ étant convergentes et de même limite, nous en déduisons que la suite $(\frac{a_n}{b_n})$ est convergente. En faisant apparaître une série télescopique, nous obtenons:

$$\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{a_k}{b_k} \right) + \frac{a_1}{b_1} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{b_k b_{k+1}}.$$

Ainsi obtenons-nous la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{b_{n-1}b_n}$ qui a même somme que $\frac{a_n}{b_n}$. De **4.c.** nous déduisons la dernière écriture sous forme de fractions continues.

6. (a) Les suites a et b forment une base de $E(u)$ et $x_0 a + x_1 b$ est la décomposition de x dans cette base.
 (b) Si x est de limite nulle, alors (a fortiori puisque $b_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{b_n} = 0$. En utilisant la précédente décomposition, nous obtenons:

$$x_0 \frac{a_n}{b_n} + x_1 \longrightarrow 0.$$

Nous avons donc bien $x_0 \ell + x_1 = 0$.

- (c) Nous savons déjà que $\frac{a_{2n-1}}{b_{2n-1}} \leq \ell \leq \frac{a_{2n}}{b_{2n}}$. Si $x_0 > 0$ nous obtenons alors l'encadrement: $x_{2n-1} \leq 0 \leq x_{2n}$ (le cas $x_0 < 0$ conduit à l'encadrement inverse, ce qui ne change pas la conclusion). Ainsi, x_{2n-1} et x_{2n} sont de signes opposés. Or, $a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1} = (-1)^{n+1}$, d'où $x_{n+1}b_n - x_nb_{n+1} = x_0(a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}) = (-1)^{n+1}x_0$. Aussi $\forall n \geq 1$ nous avons $|x_nb_{n+1}| \leq |x_0|$. Or, comme (b_n) tend vers $+\infty$, on en déduit que $x_n \rightarrow 0$.

Partie III: Développement en fraction continue de fonctions particulières

Dans cette partie, la suite u est définie par $u_n = (2n+3)r$ où r est un réel strictement positif fixé. On pose aussi $u_{-1} = r$.

1. (a) φ_n est une fonction polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, nous avons:

$$\varphi'_{n+1}(t) = \frac{n+1}{(n+1)!} \left(\frac{r^2 t^2 - 1}{2r} \right)^n \frac{2r^2 t}{2r} = r t \varphi_n(t).$$

En dérivant une seconde fois, on trouve après quelques calculs:

$$\varphi''_{n+2}(t) = u_n \varphi_{n+1}(t) + \varphi_n(t).$$

(b) Montrons que $x_{n+2} = u_n x_{n+1} + x_n$. Pour ce faire, effectuons deux intégrations par parties:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \int_{-1/r}^{1/r} \varphi_n(t) dt = [\varphi'_{n+2}(t) e^t]_{-1/r}^{1/r} - \int_{-1/r}^{1/r} \varphi'_{n+2}(t) e^t dt \\ &= -[\varphi''_{n+2}(t) e^t]_{-1/r}^{1/r} + \int_{-1/r}^{1/r} \varphi''_{n+2}(t) e^t dt \end{aligned}$$

En utilisant la formule précédente, nous en déduisons que

$$x_{n+2} = \int_{-1/r}^{1/r} (u_n \varphi_{n+1}(t) + \varphi_n(t)) e^t dt = u_n x_{n+1} + x_n.$$

Aussi $x \in E(u)$.

2. (a) $|\varphi_1(t)| = \left| \frac{r^2 t^2 - 1}{2r} \right| \leq \frac{1}{2r}$. Donc $|\varphi_n(t)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2r} \right)^n$.

$$|x_n| = \left| \int_{-1/r}^{1/r} \varphi_n(t) e^t dt \right| \leq \int_{-1/r}^{1/r} |\varphi_n(t) e^t| dt \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2r} \right)^n \int_{-1/r}^{1/r} e^t dt \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2r} \right)^n 2e^{1/r}.$$

Par les croissances comparées, nous déduisons alors que x_n tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ (car $\alpha^n = o(n!)$ en $+\infty$).

Remarque 1 (Démonstration: si $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors $\alpha^n = o(n!)$)

Pour se faire, nous allons démontrer que $\frac{\alpha^n}{n!} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. L'astuce consiste à décomposer $\frac{\alpha^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha}{k}$. Ainsi, il existe un entier naturel N tel que $\alpha < N$. Pour $n \geq N$, nous avons: $\frac{\alpha^n}{n!} = \left(\prod_{k=1}^N \frac{\alpha}{k} \right) \left(\prod_{k=N+1}^n \frac{\alpha}{k} \right) \leq \left(\prod_{k=1}^N \frac{\alpha}{k} \right) \left(\frac{\alpha}{N+1} \right)^{n-N}$. Or, $\frac{\alpha}{N+1} < 1$ ce qui implique la convergence de la suite $\left(\frac{\alpha}{N+1} \right)^n$ vers 0. On conclut par le théorème des gendarmes...

(b) Nous savons, d'après la question **II.6.b** que $\ell = \frac{-x_1}{x_0}$. Déjà $\ell = [3r; 5r; 7r; \dots; (2n+3)r; \dots]$. Il reste à calculer ℓ par une autre manière: par **II.6.b** nous savons que $x_0 \ell + x_1 = 0$, soit $\ell = -\frac{x_1}{x_0}$. Ainsi, calculons x_0 et x_1 .

$$x_0 = \int_{-1/r}^{1/r} e^t dt = e^{1/r} - e^{-r} = 2sh(1/r).$$

D'autre part, nous avons:

$$x_1 = \int_{-1/r}^{1/r} \frac{r^2 t^2 - 1}{2r} e^t dt = - \int_{-1/r}^{1/r} \frac{2tr^2}{2r} e^t dt = -[tre^t]_{-1/r}^{1/r} + \int_{-1/r}^{1/r} re^t dt.$$

Nous obtenons ainsi finalement: $x_1 = -2ch(\frac{1}{r}) + 2rsh(\frac{1}{r}) - r$. D'où, finalement: $th(\frac{1}{r}) = \frac{1}{r+\ell}$. En utilisant l'écriture obtenue pour ℓ sous forme de fractions continues, nous obtenons:

$$th\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r+\ell} = [r; 3r; 5r; \dots; (2n+3)r; \dots].$$