

Inégalités classiques au Capes

Proposition 1 (*Inégalité triangulaire géométrique*)

Soient A, B, C trois points de l'espace. Alors $AB + BC \geq AC$. Nous avons l'égalité lorsque $B \in [A, C]$.

Exercice 1. Soient O, A_1 et A_2 trois points de l'espace.

1. Prouver que $\|\vec{OA_1}\| + \|\vec{OA_2}\| \leq \|\vec{OA_1} + \vec{OA_2}\| + \|\vec{OA_1} - \vec{OA_2}\|$.
2. Donner une interprétation géométrique de ce résultat (sur les longueurs de segments remarquables du parallélogramme).
3. Soient O, A_1, A_2, A_3 et A_4 des points de l'espace. Prouver que $\|\sum_{i=1}^4 \vec{OA_i}\| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \|\vec{OA_i} + \vec{OA_j}\|$.

Exercice 2. Prouver que, pour tout réels a et b nous avons $(a + b)^2 \geq 4ab$. Préciser ce cas d'égalité.

Proposition 2 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Si u et v sont des éléments de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, alors $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Exercice 3. Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ des réels strictement positifs. Montrer: $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \times \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) > n^2$.

Définition 1 (*Fonction convexe*)

Une fonction f est convexe sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ lorsque, pour tout $\lambda \in [0; 1]$ et tout éléments $x, y \in I$, nous avons: $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Théorème 1 (*Inégalité de Jensen*)

Soit f une fonction convexe sur un intervalle réel I . Soit n un entier naturel strictement positif et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de réels de I . Soit enfin $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de réels de l'intervalle $[0; 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Alors nous avons:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Exercice 4: Inégalité de Jensen et applications

1. Démontrer l'inégalité de Jensen en utilisant une récurrence.
2. Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique suivante:

Proposition 3 (*Inégalité arithmético-géométrique*)

Soient $(x_1, \dots, x_n)$ n réels strictement positifs, on définit leur moyenne arithmétique m_a et leur moyenne géométrique m_g par: $m_a = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ et $m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$. Alors, $m_g \leq m_a$ avec égalité si et seulement si les x_i sont tous égaux.

3. Redémontrer l'exercice 3 au moyen de l'inégalité arithmético-géométrique.
4. Soient A, B, C les mesures des angles géométriques d'un triangle (on supposera sans perte de généralité que $0 \leq A \leq B \leq C \leq \pi$).
 - a. Prouver que $\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Dans quel cas a-t-on égalité?
 - b. (★★) Prouver que $\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \leq \frac{3}{2}$ (on étudiera deux cas selon la position de A par rapport à $\frac{\pi}{2}$).

Exercice 5: Inégalité de Minkowski (aussi appelée inégalité triangulaire)

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
2. Préciser le cas d'égalité.
3. Démontrer que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$.
4. (★★) Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ n réels strictement positifs. Montrer que:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=i}^n a_j} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n i^2 a_i}.$$