

Inégalités classiques au Capes Solutions

Exercice 1. Soient O , A_1 et A_2 trois points de l'espace.

1.

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{OA_1}\| &= \left\| \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} \right) + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} \right) \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\| + \|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}\| \right) \quad \text{par l'inégalité triangulaire}\end{aligned}$$

De même, nous avons (par symétrie des indices) $\|\overrightarrow{OA_2}\| \leq \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\| + \|\overrightarrow{AO_1} - \overrightarrow{OA_2}\| \right)$. Ainsi en sommant ces deux relations nous obtenons la relation voulue.

2. Dans un parallélogramme, la somme des longueurs de deux côtés consécutifs est inférieure à la somme des longueurs des diagonales.

Remarque: Il ne faut pas confondre cette *inégalité* avec l'*égalité du parallélogramme* (dans un espace euclidien ou préhilbertien): $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

3. D'après la question 1. nous avons $\sum_{i=1}^4 \|\overrightarrow{OA_i}\| \leq \|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}\| + \|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}\| + \|\overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}\| + \|\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_4}\|$. De même, en réappliquant la formule du 1., nous avons:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2}\| + \|\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_4}\| &\leq \|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_4}\| + \|\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}\| \\ &\leq \|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}\| + \|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_4}\| + \|\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}\| + \|\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4}\|\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que $\sum_{i=1}^4 \|\overrightarrow{OA_i}\| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \|\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}\|$.

Exercice 2.

Nous avons $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Or, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$ d'où $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Il s'ensuit que $(a + b)^2 \geq 4ab$. Nous avons égalité lorsque $a = b$.

Exercice 3. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $u = (\sqrt{x_1}; \sqrt{x_2}; \dots; \sqrt{x_n})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}; \frac{1}{\sqrt{x_2}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{x_n}})$ (on considère la norme euclidienne classique sur $\mathbb{R}^n$: $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$). Nous avons alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \times \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq \langle u, v \rangle^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 = n^2.$$

Exercice 4: Inégalité de Jensen et applications

1. Pour $n = 1$, l'inégalité est triviale (et est une égalité). Le cas $n = 2$ résulte directement du fait que f soit une fonction convexe.

Supposons à présent l'inégalité vraie pour un rang n fixé et démontrons là au rang $n + 1$. Ainsi, soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ $(n + 1)$ réels de $[0; 1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Nous avons alors: $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) + \lambda_{n+1} x_{n+1}$. Posons $y = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i$. Alors, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1})y$ et nous avons, par la convexité de f :

$f(\lambda_{n+1} x_{n+1} + (1 - \lambda_{n+1})y) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - \lambda_{n+1}) f(y)$. soit $f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) \leq \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) + (\sum_{i=1}^n \lambda_i) f(y)$. Il reste alors à utiliser l'hypothèse de récurrence sur $f(y)$ pour conclure. Pour cela, on remarque que $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = 1$.

2. Pour ce faire, nous allons déjà montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Le plus simple est de dériver deux fois cette fonction: $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ainsi la fonction étant concave, nous en déduisons que $-f$ est convexe et donc en appliquant l'inégalité de Jensen, nous obtenons:

$$\ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(x_i) = \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i^{1/n} \right).$$

En composant par la fonction exponentielle qui est croissante, nous obtenons:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}.$$

3. Par l'inégalité arithmético-géométrique, nous avons:

$$\sum_{i=1}^n x_i \geq n (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

En faisant le produit de ces deux inégalités (qui sont toutes deux strictement positives, donc il y a conservation du sens des inégalités), nous avons:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq n^2.$$

4.a. Les angles A, B, C sont dans $[0; \pi]$ (mesure principale), donc $A + B + C = \pi$. Ainsi, par concavité de la fonction $\sin$ sur cet intervalle, nous obtenons: $\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) \geq \frac{1}{3}(\sin(A) + \sin(B) + \sin(C))$. Or, $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où l'inégalité voulue.

4.b. (**) On utilise la même technique que précédemment, sauf que la fonction $\cos$ n'est ni concave, ni convexe sur $[0; \pi]$. Ainsi, on étudie sur $[0; \pi/2]$, segment sur lequel la fonction $\cos$ est concave.

Premier cas: Si $A \leq \frac{\pi}{2}$. Alors évidemment, B et C sont dans $[0; \pi/2]$ et par concavité de $x \mapsto \cos(x)$ sur cet intervalle, nous avons:

$$\frac{1}{3}(\cos(A) + \cos(B) + \cos(C)) \leq \cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \leq \frac{3}{2}$.

Second cas: Si $A \geq \frac{\pi}{2}$: alors, B et C sont dans $[0; \pi/2]$ et par concavité de la fonction cosinus sur cet intervalle, nous avons:

$$\frac{1}{2}(\cos(B) + \cos(C)) \leq \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{A}{2}\right).$$

Il s'ensuit alors que $\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \leq \cos(A) + 2 \sin\left(\frac{A}{2}\right) = 1 - 2 \sin^2(A/2) + 2 \sin(A/2) = \frac{3}{2} - 2(\sin(A/2) - 1/2)^2 < \frac{3}{2}$.

Nous avons donc prouvé ce résultat dans tous les cas possibles (disjonction des cas).

Exercice 5: Inégalité de Minkowski (aussi appelée inégalité triangulaire)

1. Nous allons utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \times \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$. Il s'ensuit alors que, puisque une norme est toujours positive, nous avons $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
2. Le cas d'égalité se rapporte au cas d'égalité de Cauchy-Schwarz: Dans Cauchy-Schwarz, $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \times \|y\|$ si et seulement si x et y sont liés. Nous avons donc la condition $\{x, y\}$ liés, mais il faut aussi que $\langle x, y \rangle$ soit positif, c'est-à-dire que x et y soient *positivement liés* (i.e. $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$).
3. Par l'inégalité triangulaire, nous avons: $\|x\| = \|-y + (x+y)\| \leq \|y\| + \|x+y\|$. Ainsi, $\|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$. De même, en échangeant les rôles de x et y (i.e. par symétrie des indices), nous avons: $\|y\| - \|x\| \leq \|x+y\|$. Aussi, $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\|$.
4. (**) On considère les n vecteurs suivants de $\mathbb{R}_+^n$: $v_1 = (\sqrt{a_1}; \dots, \sqrt{a_n})$, $v_2 = (0, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n})$, $v_3 = (0, 0, \sqrt{a_3}, \dots, \sqrt{a_n})$, $\dots$, $v_n = (0, \dots, 0, \sqrt{a_n})$.

La norme euclidienne du i -ième vecteur de cette liste est $\|(0, \dots, 0, \sqrt{a_i}, \dots, \sqrt{a_n})\| = \sqrt{\sum_{j=i}^n a_j}$. En sommant ces normes pour i variant de 1 à n , on obtient: $\sum_{i=1}^n \|v_i\| = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=i}^n a_j}$ (on reconnaît alors le membre de gauche de la question!).

Par l'inégalité de Minkowski (appliqué n fois ou encore à l'ordre n), nous avons: $\|\sum_{i=1}^n v_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|v_i\|$: nous avons déjà calculé le membre de droite. Pour celui de gauche, il reste le calculer: $\sum_{i=1}^n v_i = (\sqrt{a_1}; 2\sqrt{a_2}; 3\sqrt{a_3}; \dots; n\sqrt{a_n})$. Aussi, la norme de ce vecteur est égal à $\sqrt{\sum_{i=1}^n i^2 a_i}$ et nous obtenons l'inégalité souhaitée.