

Problème sur la transformation de Laplace

Les parties I. et II. forment le deuxième problème de CAPLP Agricole 1999. Il est conseillé de les traiter en 2h30-3h. Les parties III. et IV., plus techniques, permettent de revenir sur certains points de cette transformée. Globalement, ce problème est assez ardu car il cumule les difficultés techniques de différents domaines. Aussi constitue-t-il une excellente révision générale des techniques sur les intégrales généralisées et à paramètres. Notez que la quatrième partie est *très* difficile...

On désigne par E l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et par F l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On rappelle que E et F , munis de l'addition et de la multiplication par des nombres réels, sont des espaces vectoriels. On note E_0 le sous-ensemble de E constitué des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et telles que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est convergente. On considère l'application $\mathcal{L}$ de E_0 dans F définie par $\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$.

Partie I

Obtention de quelques résultats concernant l'application $\mathcal{L}$.

1. Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de E et que l'application $\mathcal{L}$ est linéaire.
2. Soit n un nombre entier naturel. On considère la fonction f_n , définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = t^n$ si $n \neq 0$ et $f_n(t) = 1$ si $n = 0$.
 - a. Montrer que f_n appartient à E_0 et que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}(f_n)(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$.
 - b. Soit ω un nombre réel. On considère les fonctions g_1 et g_2 définies sur $\mathbb{R}_+$ par $g_1(t) = \cos(\omega t)$ et $g_2(t) = \sin(\omega t)$. Montrer que les fonctions g_1 et g_2 appartiennent à E_0 et que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{L}(g_1)(x) = \frac{x}{x^2 + \omega^2}$ et $\mathcal{L}(g_2)(x) = \frac{\omega}{x^2 + \omega^2}$ (On pourra utiliser l'égalité $\cos(\omega t) + i \sin(\omega t) = e^{i\omega t}$).
 - c. La fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui, à t , associe e^t , est-elle un élément de E_0 ?
3. On désigne par P l'espace vectoriel des fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
 - a. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E_0 .
 - b. Soit h_1 l'élément appartenant à P , défini par $h_1(t) = 3t^2 - 2t + 8$. Déterminer $\mathcal{L}(h_1)$.
 - c. Déterminer le noyau et l'image de la restriction de $\mathcal{L}$ à P .
 - d. Soit ϕ l'élément appartenant à F , défini par $\phi(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{24}{x^4}$.
Montrer qu'il existe un élément h_2 appartenant à P , unique, tel que $\mathcal{L}(h_2) = \phi$. Déterminer h_2 .
4. Soit f une fonction appartenant à E , continue et telle que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tx} f(t) = 0.$$

- a. Montrer que f appartient à E_0 (on pourra tout d'abord montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto e^{-\frac{x}{2}t} f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$).
 - b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$.
5. Soit f une fonction appartenant à E , dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de fonction dérivée continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tx} f(t) = 0$. On sait, d'après la question précédente, que f appartient à E_0 .
 - a. Montrer que f' appartient à E_0 et que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.
 - b. Soit g_3 la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g_3(t) = \sin^2(3t)$. Montrer que g_3 et g'_3 appartiennent à E_0 et déterminer $\mathcal{L}(g_3)$ et $\mathcal{L}(g'_3)$.

Partie II*Détermination d'une solution d'une équation différentielle*

On note E_1 le sous-ensemble de E constitué des fonctions f indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et telles que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout nombre entier naturel n , $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tx} f^{(n)}(t) = 0$. (On convient que $f^{(0)} = f$). On sait, d'après la partie I, que les éléments de E_1 et leurs dérivées successives appartiennent à E_0 .

1. Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E_0 .
2. Soit f un élément appartenant à E_1 . Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout nombre entier naturel n non nul, $\mathcal{L}(f^{(n)})(x) = x^n \mathcal{L}(f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} f^{(k)}(0)$.
3. On considère l'équation différentielle $(D) : y''' + y'' + y' + y = t + 1$, où y est une fonction de la variable t , définie sur $\mathbb{R}_+$.
 - a. On suppose que l'équation différentielle (D) admet une solution Ψ appartenant à E_1 , et telle que $\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$. Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}(\Psi)(x) = \frac{1}{x^2(x^2+1)}$.
 - b. Déterminer une solution Ψ de l'équation différentielle (D) , appartenant à E_1 et telle que $\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$.

Partie III*Injectivité de $\mathcal{L}$.*

1. Montrer que, si $h \in \mathcal{C}^0([0; 1]; \mathbb{C})$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^n h(x) dx = 0$, alors $\int_0^1 |h(x)|^2 dx = 0$. (On pourra utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass en introduisant une suite de polynômes (P_n) uniformément convergente vers $\bar{h}$). En déduire la nullité de h .
2. Soient $f \in E_0, (s, a) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer

$$\mathcal{L}(f)(s+a) = a \int_0^{+\infty} e^{at} g(t) dt \quad \text{où } \forall t > 0, g(t) = \int_0^t e^{-su} f(u) du$$

3. Si, sous les mêmes conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{L}(s+na) = 0$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \int_0^1 u^n g(-\frac{\ln(u)}{a}) du = 0$. En déduire que, pour tout $t \geq 0, g(t) = 0$.
4. Montrer l'injectivité de $\mathcal{L}$.