

Concours blanc 1

Partie Analyse (EC 121)

Convergence d'une suite à partir de ses sous-suites (exo 87 et 58 p. 76, Math'X ancienne édition) _____

1. Résultat général

Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout entier n , $p_n = u_{2n}$ et $q_n = u_{2n+1}$.

- (a) Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ , alors il en est de même des suites (p_n) et (q_n) .
- (b) Réciproquement, on suppose que les deux suites (p_n) et (q_n) sont convergentes vers la même limite ℓ . Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ . Montrer qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont dans I et en déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ .

2. Application

Soit $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) On pose $p_n = u_{2n}$. Montrer que la suite (p_n) est croissante.
- (b) On pose $q_n = u_{2n+1}$. Montrer que la suite (q_n) est décroissante.
- (c) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, $p_n - q_n$.
- (d) En déduire que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes. On désigne par ℓ leur limite commune.
- (e) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leq \ell \leq q_n$.
- (f) Trouver un rang n à partir duquel p_n ou q_n réalisent une approximation de ℓ à 10^{-6} près.
- (g) Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ .

Etude de croissances comparées (exo 118 p. 105, Terracher, Ancienne édition) _____

On définit, pour tout $n \geq 1$, u_n par $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

1. Etablir l'égalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

2. (a) Pour tout $x \geq 0$, démontrer les inégalités $(1+x)^n \geq 1+nx$ et $\ln(1+x) \leq x$.
- (b) En déduire l'encadrement $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$, pour tout $n \geq 1$.
- (c) Montrer alors que, pour tout $n \geq 6$, $2^n \leq u_n \leq e^n$.

3. Applications

- (a) Justifier l'encadrement $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$ pour $n \geq 6$.
- (b) Etudier le comportement à l'infini de $\frac{n!}{a^n}$ pour $a > 1$.

Concours blanc 1

Partie Arithmétique (EC 132)

Petit théorème de Fermat et théorème de Wilson (Math'X, exo 95 et 105 p.95, ancienne édition)

Partie A: Petit théorème de Fermat

Le but de cette partie est de démontrer que p est un nombre premier, alors pour tout entier a premier avec p , $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Soit donc p est nombre premier et k un entier tel que $0 \leq k \leq p$. On note $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$.

1. Montrer que si $1 \leq k \leq p-1$ et p premier, alors p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire que si a et b sont deux entiers $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, pour tout entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$,

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^p \equiv a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p \pmod{p}$$

4. En déduire que $n^p \equiv n \pmod{p}$.
5. Retrouver le petit théorème de Fermat.

Partie B: Application

1. Démontrer que pour tout entier naturel n , $n^7 - n$ est divisible par 7.
2. En utilisant les congruences, démontrer que $n^7 - n$ est divisible par 6.
3. Peut-on en déduire que $n^7 - n$ est divisible par 42?

Partie C: Théorème de Wilson

Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Wilson suivant: p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

1. Etude d'un cas particulier

On prend ici $p = 13$. Montrer que, pour tout $x \in \{1, 2, \dots, 11, 12\}$, il existe un unique entier $y \in \{1, 2, 3, \dots, 11, 12\}$ tel que $xy \equiv 1 \pmod{13}$. Vérifier alors que $12! \equiv -1 \pmod{13}$ (sans calculatrice!).

2. Démonstration de l'implication directe

Soit p un nombre premier et x un entier compris entre 1 et $p-1$. On considère les produits de x par $1, 2, 3, \dots, p-1$ et les restes de ces produits dans la division euclidienne par p .

- (a) Un de ces restes peut-il être nul ?
- (b) Démontrer que ces restes sont tous différents.
- (c) En déduire que, quel que soit l'entier x compris entre 1 et $p-1$, il existe un entier y compris entre 1 et $p-1$ tel que $xy \equiv 1 \pmod{p}$.
- (d) Quels sont les entiers x compris entre 1 et $p-1$ pour lesquels nous avons $x = y$ (ou encore $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$).
- (e) En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

3. Démonstration de l'implication réciproque

Réciproquement, on suppose que p est un entier ($p \geq 2$) tel que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. En utilisant l'égalité de Bezout, montrer que p est premier.