Concours blanc 1
Partie Analyse (EC 121)

Problème 1: Convergence de sous-suites et convergence de la suite

1. **Résultat général**

   (a) Supposons la suite (u_n) convergente vers ℓ. Ainsi, pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les éléments de (u_n) appartiennent à I. Il en est de même des éléments de (p_n) à partir du rang $E\left(\frac{n_0}{2}\right)$ et de (q_n) à partir du rang $E\left(\frac{n_0-1}{2}\right)$. On en déduit alors que les suites (p_n) et (q_n) sont toutes deux convergentes et de limite ℓ.

   (b) Réciproquement, supposons que les deux suites (p_n) et (q_n) sont convergentes vers la même limite ℓ, et soit I un intervalle ouvert contenant ℓ. Aussi, il existe un rang n_1 à partir duquel tous les éléments de la suite (p_n) sont dans I et un rang n_2 à partir duquel tous les éléments de (q_n) sont dans I. Auss, pour $n_0 = max(n_1; n_2)$, tous les éléments des suites (p_n) et (q_n) sont dans I. Il s'ensuit aussi que tous les termes de (u_n) sont dans I à partir du rang $N = 2n_0 + 1$: aussi, la suite (u_n) converge t'elle vers ℓ.

2. **Application**

   (a) Etudions la monotonie de la suite (p_n). $p_{n+1} - p_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$ donc la suite (p_n) est croissante.

   (b) Nous avons $q_{n+1} - q_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0$. Aussi, la suite (q_n) est décroissante.

   (c) Nous avons $p_n - q_n = u_{2n} - u_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1}$. On en déduit alors que la suite $(p_n - q_n)$ est convergente et de limite nulle.

   (d) La suite (p_n) étant croissante, (q_n) étant décroissante et $(p_n - q_n)$ tendant vers 0, on en déduit que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes: elles sont donc convergentes et ont même limite ℓ.

   (e) Comme p_n est une suite croissante et de limite ℓ, nous avons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant \ell$. De même, (q_n) étant décroissante et de limite ℓ, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ell \leqslant q_n$. Il s'ensuit donc l'encadrement: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant \ell \leqslant q_n$.

   (f) Du précédent encadrement, nous déduisons que si $q_n - p_n \leqslant 10^{-6}$, alors p_n et q_n seront des approximations de ℓ à 10^{-6} près (respectivement par défaut et par excès). Or, $q_n - p_n = \frac{1}{2n+1}$. Aussi, cherche t'on le plus petit n tel que $\frac{1}{2n+1} \leqslant 10^{-6}$ ce qui donne $n \geqslant \frac{10^6-1}{2}$ soit $x = 5 \cdot 10^5$.

   (g) Nous savons que les suites (p_n) et (q_n) convergent vers la même limite ℓ. Aussi, d'après **1.b**, la suite (u_n) est-elle aussi convergente et de limite ℓ.
   Note: On peut prouver (supérieur) que $\ell = \ln(2)$.

Exercice 2: Etude de croissances comparées

1. Nous avons $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} = \frac{n^{n+1}}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Il est clair que $1 < 1 + \frac{1}{n}$ et par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Aussi, la suite (u_n) est-elle croissante.

2. (a) Par le binôme de Newton, nous avons $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Comme $x \geqslant 0$, nous en déduisons que $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 0$ et donc $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
   Considérons à présent la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$. Cette fonction est dérivable comme composée de fonctions dérivables, et nous avons $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geqslant 0$ puisque $x \geqslant 0$. Il s'ensuit donc que f est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$ soit $x \geqslant \ln(1+x)$.

   (b) En posant $x = \frac{1}{n}$ dans la première inégalité, nous avons $2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. A présent, considérons la seconde inégalité: $\ln(1+x) \leqslant x$. Pour $x = \frac{1}{n}$, nous avons $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ soit $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 1$. Comme $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$, en composant par la fonction exponentielle qui est croissante sur $\mathbb{R}$, nous obtenons $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

   (c) Raisonnons par récurrence.
   Initialisation Pour $n = 6$, nous avons $u_6 = \frac{6^6}{6!} = \frac{46656}{720} \approx 64.8$ qui est bien compris entre $2^6 = 64$ et $e^6 \approx 403$.
   Hérédité Supposons la formule vraie au rang $n \geqslant 6$ et démontrons-là au rang $n+1$. Par l'encadrement de la question précédente, nous savons que $2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$ d'où par la question **1.** nous avons $2 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant e$.

Comme $u_n \geqslant 1$, en multipliant ces inégalités par u_n, nous obtenons $2u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant e \times u_n$ et par hypothèse de récurrence $2 \times 2^n \leqslant u_{n+1} \leqslant e \times e^n$ d'où $2^{n+1} \leqslant u_{n+1} \leqslant e^{n+1}$. Il s'ensuit donc que la formule est vraie au rang $n+1$.
Conclusion: La formule est donc vraie à tous les rangs $n \geqslant 6$.

3. **Applications**

   (a) Nous déduisons par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ que, $\frac{1}{e^n} \leqslant \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$. En multipliant alors par n^n, nous obtenons que $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n$.

   (b) En divisant la précédente inégalité par a^n, nous obtenons que

$$\left(\frac{n}{ae}\right)^n \leqslant \frac{n!}{a^n} \leqslant \left(\frac{n}{2a}\right)^n$$

   Or, pour n assez grand $\frac{n}{ae} \geqslant 2$. Or par le critère des suites géométriques, (2^n) diverge vers $+\infty$. Ainsi, le critère de comparaison des suites implique que $\left(\frac{n!}{a^n}\right)$ diverge vers $+\infty$.

Concours blanc 1
Partie Arithmétique (EC 132)

Exercice 1: Petit théorème de Fermat et théorème de Wilson
Partie A: Petit théorème de Fermat

1. Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, nous avons $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$. $p | p!$ mais $p \not| k!$ (car $k < p$) et $p \not| (p-k)!$ (car $p - k < p$). Il s'ensuit donc que $p | \binom{p}{k}$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

2. Soient a et b deux entiers. Alors par la formule du binôme de Newton, nous avons $(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} = a^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} + b^p$. Aussi, comme pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, $p | \binom{p}{k}$ nous en déduisons que $p | \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$. Il s'ensuit donc, en considérant les classes de congruences modulo p, que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$.

3. Raisonnons donc par récurrence sur l'entier naturel n.
   Initialisation: Pour $n = 1$ la formule est évidente. Pour $n = 2$, nous l'avons démontrée dans la question précédente.
   Hérédité: Supposons la formule vraie pour tout ensemble $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n éléments et montrons là pour un ensemble de $n+1$ éléments.
   Par la formule précédente, nous avons: $(\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{=a} + a_{n+1})^p \equiv (a + a_{n+1})^p \equiv a^p + a_{n+1}^p \mod p$. En utilisant alors l'hypothèse de récurrence, nous avons $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1})^p \equiv a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p + a_{n+1}^p \mod p$. Aussi, la formule est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion: On a démontré que, pour tout $n \geqslant 1$, et pour tous entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nous avons $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p \equiv a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p \mod p$.

4. En prenant $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ dans la précédente formule, nous obtenons que $n^p \equiv n \mod p$.

5. Supposons donc a entier non divisible par le nombre premier p. Par la précédente formule, nous savons que $a^p \equiv a \mod p$. A présent, puisque p est premier, $p \not| a$ implique que a et p sont premiers entre eux. Aussi, par l'identité de Bezout, il existe deux entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ua + vp = 1$, où encore $ua \equiv 1 \mod p$. En mutipliant la relation de congruence $a^p \equiv a \mod p$ par u, nous obtenons alors: $ua^p \equiv ua \mod p$. Comme $ua^p = ua \cdot a^{p-1}$ il s'ensuit que $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Partie B: Applications

1. En utilisant la formule **A.4** nous obtenons, puisque 7 est un nombre premier, que $n^7 - n \equiv 0 \mod 7$ et donc $7 | n^7 - n$.

2. Raisonnons par épuisement des cas selon la classe de congruence de n. Nous savons que les restes possibles de la division euclidienne de n par 6 sont $\{0,1,2,3,4,5\}$ donc étudions ces six cas séprarément:
Si $n \equiv 0 \mod 6$, alors $n^7 \equiv 0 \mod 6$ et donc $n^7 - n \equiv 0 \mod 6$.
Si $n \equiv 1 \mod 6$, alors $n^7 \equiv 1 \mod 6$ et donc $n^7 - n \equiv 0 \mod 6$.
Si $n \equiv 2 \mod 6$, alors comme $2^7 = 128 = 21 * 6 + 2$, nous avons $n^7 \equiv 2 \mod 6$ et donc $n^7 - n \equiv 0 \mod 6$.
Si $n \equiv 3 \mod 6$, alors comme $3^7 = 2187 = 364 * 6 + 3$, nous avons $n^7 \equiv 3 \mod 6$ et donc $n^7 - n \equiv 0 \mod 6$.
Si $n \equiv 4 \mod 6$, alors comme $4^7 = 2730 * 6 + 4$, nous avons $n^7 \equiv 4 \mod 6$ et donc $n^7 - n \equiv 0 \mod 6$.
Si $n \equiv 5 \mod 6$, alors comme $5^7 = 13020 * 6 + 5$, nous avons $n^7 \equiv 5 \mod 6$ et donc $n^7 - n \equiv 0 \mod 6$.
Aussi, nous montrons que, par épuisement des cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $n^7 - n \equiv 0 \mod 6$.
Remarque *Il n'est pas utile d'avoir une calculatrice pour effectuer la division euclidienne: en effet, par exemple:* $5^7 \equiv 25 \times 25 \times 25 \times 5 \equiv 1 \times 1 \times 1 \times 5 \equiv 5 \mod 6$.

3. **Remarque:** *Question difficile mais classique. Cela ne marche que lorsque les deux classes de congruence sont premières entre elles (résultat provenant du théorème des restes chinois).*
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Puisque $n^7 - n \equiv 0 \mod 7$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n^7 - n = 7k$. De même, puisque $n^7 - n \equiv 0 \mod 6$, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n^7 - n = 6k'$. Nous avons alors $7k = 6k'$ soit par exemple $7|6k'$. Or, $7 \wedge 6 = 1$ donc par le lemme de Gauss, $7|k'$: il existe donc $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $k' = 7k''$. Aussi, $n^7 - n = 6k' = 6 \times 7k'' = 42k''$ d'où $n^7 - n$ est divisible par 42.

Partie C: Théorème de Wilson

1. **Etude d'un cas particulier** Nous avons $1 \times 1 \equiv 2 \times 7 \equiv 3 \times 9 \equiv 4 \times 10 \equiv 5 \times 8 \equiv 6 \times 11 \equiv 7 \times 2 \equiv 8 \times 5 \equiv 9 \times 3 \equiv 10 \times 4 \equiv 11 \times 6 \equiv 12 \times 12 \equiv 1 \mod 13$.

$$\begin{aligned} 12! &\equiv 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \\ &\equiv 1 \times \underbrace{(2 \times 7)}_{\equiv 1} \times \underbrace{(3 \times 9)}_{\equiv 1} \times \underbrace{(4 \times 10)}_{\equiv 1} \times \underbrace{(5 \times 8)}_{\equiv 1} \times \underbrace{(6 \times 11)}_{\equiv 1} \times 12 \\ &\equiv 12 \equiv -1 \mod 13 \end{aligned}$$

2. **Démonstration de l'implication directe**

   (a) Soit $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Donc $p \not| x$. De même, p ne divise aucun des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$, donc comme p premier, p ne divise aucun des nombres $x, 2x, 3x, 4x, \ldots, (p-1)x$. Aussi, aucun des restes de la division euclidienne de ces entiers par p n'est-il nul.

   (b) Considérons k et k' deux éléments de $\{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ et supposons que kx et $k'x$ ont même reste dans la division euclidienne par p. Aussi, $kx - k'x$ est-il divisible par p. Sans perte de généralité, on peut supposer que $k \geqslant k'$: aussi $(k-k')x$ est un multiple de x. De $1 \leqslant k, k' \leqslant p-1$, on déduit que $0 \leqslant k - k' \leqslant p-2$ d'où $0 \leqslant (k-k')x \leqslant (p-1)x$. Or, comme nous savons qu'aucun des nombres $x, 2x, 3x, 4x, \ldots, (p-2)x$ n'est un multiple de p, il s'ensuit que $(k-k')x = 0$. Aussi, si kx et $k'x$ ont même reste dans la division euclidienne par p, alors $k = k'$. Ainsi, si $1 \leqslant k \neq k' \leqslant p-1$, alors kx et $k'x$ ont des restes différents dans la division euclidienne par p.

   (c) Remarquons qu'il y a p restes possibles dans la division euclidienne par p: $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$. Or, par la question **2.a**, les restes de la division euclidienne de $x, 2x, 3x, 4x, \ldots, (p-1)x$ sont non nul: aussi, ils sont dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$. Cet ensemble comporte $p-1$ éléments, et, puisque tous ces restes sont différents, il s'ensuit que l'un deux est égal à 1. Aussi, il existe $y \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ tel que le reste de la division euclidienne de xy par p est 1, d'où $xy \equiv 1 \mod p$.

   (d) Remarquons que nous cherchons les x tels que $x^2 \equiv 1 \mod p$, soit $x^2 - 1 \equiv 0 \mod p$, donc les x tels que $p|(x^2-1) = (x-1)(x+1)$. Comme p est un nombre premier, il s'ensuit que soit $p = x-1$ soit $p = x+1$, donc $x = 1$ ou $x = p-1$ (car $x \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$).

   (e) Considérons donc le produit $(p-1)!$. On peut donc regrouper les termes deux à deux, l'un jouant le rôle de x et l'autre celui de y de sorte que $xy \equiv 1 \mod p$. Les deux seuls éléments ne pouvant être regroupé avec un y (car $x = y$) sont 1 et $p-1$. Il s'ensuit donc que $(p-1)! \equiv 1 \times (p-1) \mod p$ et donc $(p-1) \equiv -1 \mod p$.

3. **Démonstration de l'implication réciproque**
Supposons donc que $p \geqslant 2$ vérifie $(p-1)! \equiv -1 \mod p$. Alors, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(p-1)! + kp = -1$ soit encore $-(p-1)! - kp = 1$. Aussi, par l'identité de Bezout, nous en déduisons que p et $(p-1)!$ sont premiers entre eux. Aussi, aucun des éléments du produit de $(p-1)! = \prod_{d=1}^{p-1} d$ autre que 1 ne divise p: p est donc premier.