

Partiel: EC 132 Structures algébriques
Mercredi 29 Octobre, 10h-12h

Le sujet comporte 3 exercices indépendants.

Si le candidat détecte ce qui lui semble être une erreur, il l'indique sur sa copie ainsi que les initiatives qu'il est amené à prendre pour poursuivre.

★ ★ ★

Exercice 1: Supplémentaire commun à deux sous-espaces vectoriels (8 points)

Soit n un entier naturel non nul. On désigne par $E = \mathbb{R}^n$ que l'on muni de sa structure classique d'espace vectoriel réel. On se donne A et B deux sous-espaces vectoriels différents de E et on se demande à quelle condition est-ce qu'il existe un sous-espace vectoriel C de E tel que $A \oplus C = B \oplus C = A + B$. Le s.e.v. C est alors un supplémentaire commun à A et B dans $A + B$.

1. Obtention d'une condition nécessaire

On suppose dans cette question l'existence du sous-espace vectoriel C vérifiant $A \oplus C = B \oplus C = A + B$.

Montrer alors que $\dim(A) = \dim(B)$ et exprimer $\dim(C)$ à l'aide de $\dim(A)$ et $\dim(A \cap B)$.

Dans la suite du problème, nous considérerons que $\dim(A) = \dim(B)$. Nous allons montrer que, sous cette seule condition, le sous-espace vectoriel C existe.

2. Suffisance de la condition

- (a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel A' tel que $(A \cap B) \oplus A' = A$ (i.e. A' est un supplémentaire de $A \cap B$ dans A).
- (b) On admet qu'il existe de même un sous-espace vectoriel B' tel que $(A \cap B) \oplus B' = B$.
Montrer que $A' \cap B' = \{0\}$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dim(A') = \dim(B') = p$.
- (c) On désigne par $\mathcal{B}_{A'} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_{B'} = (f_1, \dots, f_p)$ des bases respectives de A' et B' .
Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on pose $g_i = e_i + f_i$.
Montrer que la famille $\mathcal{D} = (g_1, g_2, \dots, g_p)$ est libre.
- (d) On désigne alors par C le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{D}$: déterminer $\dim(C)$.
- (e) Montrer que $A \cap C = B \cap C = \{0\}$.
- (f) En déduire que C est un supplémentaire commun à A et B dans $A + B$.

Exercice 2: Polynômes d'interpolation de Lagrange (6 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de réels deux à deux disjoints et $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que: $\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2$, $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ (où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon).

1. Donner un exemple de famille de polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.
2. Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Donner, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, l'expression des polynômes $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$.
4. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, que la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $P(X) = \sum_{i=0}^n P(\lambda_i) L_i(X)$.

Exercice 3: Deux questions indépendantes (6 points)

1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n . On dit que $p : E \rightarrow E$ est un *projecteur* de E si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$.
Montrer que si p est un projecteur, alors $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$.
Préciser la forme de la matrice de p dans une base adaptée à la précédente décomposition de E .
2. Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ $(\star)$.
 - (a) Montrer que l'ensemble des suites (u_n) vérifiant la relation $(\star)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - (b) On suppose que la suite géométrique (r^n) vérifie $(\star)$.
Montrer que r est alors solution de l'équation $2r^2 = 3r - 1$.
 - (c) En déduire que deux suites géométriques, (r_1^n) et (r_2^n) vérifiant la relation $(\star)$.
 - (d) Montrer que $\{(r_1^n); (r_2^n)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 - (e) Précisez quelle est la suite (u_n) vérifiant la relation $(\star)$ telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$.