

Solution du sujet de révision de Géométrie Affine

1 Généralités.

A.1. p est linéaire puisque

$$\forall X, X' \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}, p(\lambda X + X') = \lambda p(X) + p(X')$$

Méthode Pour obtenir la matrice, on recherche les images des vecteurs de base (la base de $\mathbb{R}^3$ vers la base de $\mathbb{R}^2$).

Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$, p est représentée par la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \end{pmatrix}$.

On cherche les vecteurs de $\ker(p)$; nous obtenons $\ker(p) = \mathbb{R}(\alpha, \beta, 1)$. Par la formule du rang, nous savons que $\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(p)) + \dim(\ker(p))$. Ainsi, $\dim(E) = 3$ et $\dim(\ker(p)) = 1$ donc $\dim(\operatorname{Im}(p)) = 2$ et comme clairement $\operatorname{Im}(p) \subset \mathbb{R}^2$, nous en déduisons que $\operatorname{Im}(p) = \mathbb{R}^2$.

Autre méthode : On peut constater que les deux premières colonnes de la matrice de p sont indépendantes, donc p est de rang 2.

A.2. On a $p(1, 0, 0) = (1, 0)$, $p(0, 1, 0) = (0, 1)$ et $p(0, 0, 1) = (-\alpha, -\beta)$.

B. La matrice de $\bar{p}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle vérifie $\bar{P}^2 = \bar{P}$ et $\bar{p}$ est

donc un projecteur. C'est la projection sur l'image de $\bar{p}$ qui est $\operatorname{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ dans la direction de son noyau qui est $\operatorname{Vect}(\vec{v})$.

Soit $X_k = (-k\alpha, -k\beta, 1)$; on a $p(X_k) = (k+1)(-\alpha, -\beta)$. On a donc

$$\|X_k\|^2 = k^2(\alpha^2 + \beta^2) + 1 \quad \text{et} \quad \|p(X_k)\|^2 = (k+1)^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

Pour $k \rightarrow +\infty$, $\|p(X_k)\|^2 - \|X_k\|^2$ tend vers $+\infty$ car $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ et on n'a donc pas $\|p(X)\| \leq \|X\|$ pour tout X de $\mathbb{R}^3$.

Commentaire Quand p est un projecteur orthogonal (ce qui n'est pas ici le cas), alors nous avons cette relation. En effet, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|p(x) \rangle = \langle p(x) - x|p(x) \rangle + \langle x|p(x) \rangle$. Or, $p(x) - x \in \ker(p)$ et $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$. Ainsi, puisque $\ker(p) = \operatorname{Im}(p)^\perp$, nous avons $\langle p(x) - x|p(x) \rangle = 0$. Ainsi, $\|p(x)\|^2 - \|x\|^2 = \langle x|p(x) \rangle - \langle x|x \rangle = \langle x|p(x) - x \rangle = -\|x - p(x)\|^2 + \langle p(x)|p(x) - x \rangle$. Nous avons alors $\langle p(x)|p(x) - x \rangle = 0$ (car p projecteur orthogonal) et donc $\|p(x)\|^2 - \|x\|^2 \leq 0$ d'où $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.

C.1. Par linéarité de p , $p(M_0 + \lambda \vec{u}) = p(M_0) + \lambda p(\vec{u})$ et donc $p(M_0 + \mathbb{R}\vec{u}) = p(M_0) + \mathbb{R}p(\vec{u})$.

Commentaire Ici, on utilise le fait que $\mathbb{R}^3$ peut être considéré à la fois comme un espace affine réel (ce qui nous permet d'avoir $p(M)$) et comme un espace vectoriel (d'où le $p(\vec{u})$)

C.2. D'après la question précédente, l'image par p de la droite affine $D = M_0 + \mathbb{R}\vec{u}$ est

- le point $p(M_0)$ si le vecteur directeur $\vec{u}$ de D est dans le noyau de p c'est à dire est colinéaire à $\vec{v}$;
- une droite dirigée par $p(\vec{u})$ sinon.

C.3. On suppose que D est dirigée par $\vec{u}$ et D' par $\vec{u}'$ où ni $\vec{u}$ ni $\vec{u}'$ n'est colinéaire à $\vec{v}$. D et D' sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

- Si D et D' sont sécantes elles possèdent un point commun Ω . On a alors $D = \Omega + \mathbb{R}\vec{u}$ et $D' = \Omega + \mathbb{R}\vec{u}'$ puis $p(D) = p(\Omega) + \mathbb{R}p(\vec{u})$ et $p(D') = p(\Omega) + \mathbb{R}p(\vec{u}')$ et droites sont sécantes (elles possèdent $p(\Omega)$ comme point commun).

La réciproque est fautive. Si on suppose que $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{v})$ est libre alors $p(\vec{u})$ et $p(\vec{u}')$ seront indépendants (sinon on trouve une combinaison de $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ colinéaire à $\vec{v}$) et les droites $p(D)$ et $p(D')$ seront sécantes car non parallèles dans le plan. Or, on peut choisir D dirigée par $\vec{u}$ et D' dirigée par $\vec{u}'$ non coplanaires et donc non sécantes (on prend $D = \operatorname{Vect}(\vec{u})$ et $D' = A + \operatorname{Vect}(\vec{u}')$ avec $\vec{OA}$ hors du plan $\operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{u}')$).

- Si D et D' sont parallèles alors $(\vec{u}, \vec{u}')$ est liée et donc $(p(\vec{u}), p(\vec{u}'))$ l'est aussi (car p est linéaire et conserve les combinaisons linéaires) et $p(D)$ et $p(D')$ sont parallèles.

La réciproque est fautive. Les droites $D = \operatorname{Vect}(\vec{i} + \vec{v})$ et $D' = \operatorname{Vect}(\vec{i} + 2\vec{v})$ sont non parallèles mais leurs images sont égales (à $\operatorname{Vect}((1, 0))$).

C.4. Soit $P_i = M_0 + Vect(\vec{u}, \vec{u}')$ un plan affine (on suppose donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ indépendants). On montre comme en C.1 que

$$p(\Pi) = p(M_0) + Vect(p(\vec{u}), p(\vec{u}'))$$

$p(\Pi)$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$ dont la nature dépend de la dimension de $Vect(p(\vec{u}), p(\vec{u}')) = p(Vect(\vec{u}, \vec{u}'))$. On distingue les deux cas suivants :

- Si $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}, \vec{u}'$ (i.e. si la famille $\vec{u}, \vec{u}'$ et $\vec{nu}$ est liée) alors $p(\Pi)$ est une droite affine.
- Sinon, $p(\Pi)$ est un plan affine c'est à dire $\mathbb{R}^2$ tout entier.

D.1. En notant $X = (x, y, z)$, nous avons $q(X) = 0 \Leftrightarrow z(2\alpha x + 2\beta y + (1 - \alpha^2 - \beta^2)z) = 0$. Ainsi, $\{X/ q(X) = 0\} = \Pi_1 \cup \Pi_2$ avec $\begin{cases} \Pi_1 : z = 0 \\ \Pi_2 : 2\alpha x + 2\beta y + (1 - \alpha^2 - \beta^2)z = 0 \end{cases}$ Π_1 et Π_2 sont deux plan vectoriels (noyau de formes linéaires non nulles).

Soit $\Pi = M_0 + \Pi_i$ (avec $i \in \{1, 2\}$). Deux éléments M et M' de Π s'écrivent $M = M_0 + \vec{u}$ et $M' = M_0 + \vec{u}'$ avec $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ dans Π_i . On a alors

$$\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\| = \|p(\vec{u} - \vec{u}')\|$$

Comme $\vec{u} - \vec{u}' \in \Pi_1$, $\|p(\vec{u} - \vec{u}')\| = \|\vec{u} - \vec{u}'\|$ et donc

$$\|\overrightarrow{p(M)p(M')}\| = \|\vec{u} - \vec{u}'\| = \|\overrightarrow{MM'}\|$$

Les plans Π_1 et Π_2 sont ainsi représentés en vraie grandeur.

D.2. On remarque que $\|p(X)\| = \|\bar{p}(X)\|$ ($\bar{p}$ étant l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ introduit en question B). On a donc

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, q(X) = (X|X) - (\bar{p}(X)|\bar{p}(X)) = (X|X) - (X|\bar{p}^* \circ \bar{p}(X)) = (X|u(X)) \text{ avec } u = Id - \bar{p}^* \circ \bar{p}$$

u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $u^* = Id^* - \bar{p}^* \circ (\bar{p}^*)^* = Id - \bar{p}^* \circ \bar{p} = u$ et u est donc autoadjoint.

Comme la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthonormée, $\bar{p}^*$ est représenté dans cette base par la transposée de la matrice $\bar{P}$ représentant $\bar{p}$. On en déduit alors que u est représenté dans la base canonique par

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 - \alpha^2 - \beta^2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de u est alors $\chi_u = \det(U - XI_3) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - (\alpha^2 + \beta^2))$. Ainsi, u possède une valeur propre strictement négative (-1) , une nulle et une strictement positive $(\alpha^2 + \beta^2)$.

E.1. Soit (u_1, u_2) une base orthonormée de P (le cours assure qu'elle existe, il suffit d'ailleurs d'orthonormaliser une base quelconque par méthode de Schmidt). En posant $u_3 = u_1 \wedge u_2$, on obtient que (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

E.2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base orthonormée choisie. On sait que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 = q'(xe_1 + ye_2) = (xu'(e_1) + yu'(e_2)|xe_1 + ye_2)$$

En particulier ($x = 1$ et $y = 0$) ($u(e_1)|e_1$) = 0 et ($x = 0$ et $y = 1$) ($u(e_2)|e_2$) = 0. Les relations précédentes deviennent alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 = xy(u'(e_1)|e_2) + yx(u'(e_2)|e_1)$$

Pour $x = y = 1$, on obtient $(u'(e_1)|e_2) = -(u'(e_2)|e_1)$ et pour $x = 1$ et $y = -1$, on trouve $(u'(e_1)|e_2) = -(u'(e_2)|e_1)$. On a donc $(u'(e_1)|e_2) = (u'(e_2)|e_1) = 0$. Comme (e_1, e_2, e_3) est orthonormée, on a

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, X = (X|e_1)e_1 + (X|e_2)e_2 + (X|e_3)e_3$$

Les relations précédemment obtenues indiquent que

$$u'(e_1) = (u'(e_1)|e_3)e_3 \text{ et } u'(e_2) = (u'(e_2)|e_3)e_3$$

En posant $a = (u'(e_1)|e_3)$ et $b = (u'(e_2)|e_3)$, la matrice de u' dans la base choisie s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & ? \\ a & b & ? \end{pmatrix}$.

Comme u' est autoadjoint et que la base est orthonormée, cette matrice est symétrique et on a donc M du type

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

On remarque que $c = (u(e_3)|e_3)$.

E.3. Soit $X \in \mathbb{R}^3$. On peut l'écrire $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et alors $u'(X) = aze_1 + bze_2 + (ax + by + cz)e_3$. Comme la base est orthonormée, on a alors

$$q'(X) = (u'(X)|X) = z(2ax + 2by + cz)$$

L'ensemble des X tels que $q'(X) = 0$ est la réunion des deux plans d'équations cartésiennes $z = 0$ et $2ax + 2by + cz = 0$ dans la base choisie. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, les normales à ces plans ne sont pas colinéaires et les deux plans sont distincts.

E.4. Discutons !

- Si $a = b = c = 0$ le rang de u' est nul.
- Si $a = b = 0$ et $c \neq 0$ alors le rang vaut 1.
- Si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors l'une des colonnes 1 ou 2 de M est non nulle et l'autre lui est proportionnelle. La troisième est indépendante et le rang vaut donc 2.

2 L'image d'une sphère.

A.1. On a $p(x, y, 0) = \xi$ et donc $p(M) = \xi$ si et seulement si $M - (x, y, 0) \in \text{Ker}(p) = \text{Vect}(\vec{v})$. On a ainsi

$$p^{-1}(\{\xi\}) = (x, y, 0) + \text{Vect}(\vec{v}) = D_\xi$$

ξ est dans $p(S)$ si et seulement s'il existe $M \in S$ tel que $p(M) = \xi$ c'est à dire si et seulement s'il existe $M \in S$ tel que $M \in D_\xi$ ou encore si et seulement si $S \cap D_\xi \neq \emptyset$.

Les éléments de D_ξ sont ceux qui s'écrivent $(x, y, 0) + t\vec{v}$ c'est à dire $(x + t \cos(\theta), y + t \sin(\theta), t)$. Il existe donc un élément commun à D_ξ et S si et seulement si on peut trouver un t réel tel que

$$(x + t \cos(\theta))^2 + (y + t \sin(\theta))^2 + t^2 = R^2$$

A.2. L'équation précédente en t est polynomiale de degré 2. Son discriminant réduit vaut

$$(y \sin(\theta) + x \cos(\theta))^2 - 2(x^2 + y^2 - R^2)$$

Elle admet une solution si et seulement si ce discriminant est positif c'est à dire si

$$\Phi(x, y) = 2(x^2 + y^2) - (y \sin(\theta) + x \cos(\theta))^2 \leq 2R^2$$

A.3.

- Le nouveau repère est (O, e_1, e_2) avec $e_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $e_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. La formule de changement de base donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Commentaire Pour inverser ces formules, inutile d'inverser la matrice : il suffit de considérer la rotation d'angle $-\theta$, donc d'on de change $\sin(\theta)$ par $-\sin(\theta)$.

Les relations voulues sont alors : $x' = \cos(\theta)x + \sin(\theta)y$ et $y' = -\sin(\theta)x + \cos(\theta)y$.

- Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}'$ une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ est donc $2(x'^2 + y'^2) - x'^2 = 2R^2$ c'est à dire

$$x'^2 + 2y'^2 = 2R^2$$

- Ceci est l'équation d'une ellipse de sommets $A_1 = (-\sqrt{2}R, 0)$, $A_2 = (\sqrt{2}R, 0)$, $B_1 = (0, -R)$ et $B_2 = (0, R)$. (A_1A_2) est le grand axe (axe focal) et est de demi-longueur $\sqrt{2}R$. (B_1B_2) est l'autre axe et sa demi-longueur est R . L'excentricité vaut alors $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (avec les notations classiques, $a^2 = 2R^2$ et $b^2 = R^2$ donnent e avec la relation $(1 - e^2)a^2 = b^2$). On a aussi des foyers $F' = (-R, 0)$ et $F = (R, 0)$ (toujours avec les notations classiques, $c^2 = a^2 - b^2 = R^2$ donc $c = R$).
- La question A.2 montre qu'un point M est dans $p(S)$ si ses coordonnées x' et y' dans $\mathcal{R}'$ vérifient

$$2(x'^2 + y'^2) - x'^2 = 2R^2$$

c'est à dire si et seulement si M est "à l'intérieur" de l'ellipse $\mathcal{E}$ (qui délimite le plan en deux parties, l'une où $2(x'^2 + y'^2) - x'^2$ est > 0 et l'autre où cette quantité est < 0).

B.1. Si $\xi \in \mathcal{E}$, le discriminant évoqué à la question A.2 est nul et l'équation de la question A.1 admet une unique solution $t_0 = -\frac{y \sin(\theta) + x \cos(\theta)}{2}$. D'après A.1, ξ admet un unique antécédent par p dans S qui est

$$\pi(\xi) = (x, y, 0) + t_0 \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{y \sin(\theta) + x \cos(\theta)}{2} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.2. Avec la formule précédente, on obtient élémentairement

$$\forall \xi = (x, y) \in \mathcal{E}, (\pi(\xi) | \vec{v}) = 0$$

ce qui montre que tout élément de Σ (élément s'écrivant $\pi(\xi)$ avec $\xi \in \mathcal{E}$) est orthogonal à $\vec{v}$.

B.3. Soit $X = (x, y, z) \in S$ ($x^2 + y^2 + z^2 = R^2$). On suppose que $(\vec{v} | X) = 0$ c'est à dire que $x \cos(\theta) + y \sin(\theta) + z = 0$. On a $p(X) = (x - z \cos(\theta), y - z \sin(\theta))$ et donc

$$\Phi(p(X)) = 2(x^2 + y^2 + z^2 - 2z(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))) - (x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - z)^2$$

Comme $x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = -z$, on obtient

$$\Phi(p(X)) = 2(x^2 + y^2 + 2z^2) - 4z^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) = 2R^2$$

et ainsi $\Phi(p(X)) \in \mathcal{E}$.

On vient de voir que Σ est constitué des éléments de S qui sont dans le plan vectoriel P_0 orthogonal à $\vec{v}$. Σ est l'intersection de P_0 avec S et c'est un cercle. Σ étant envoyé sur $\mathcal{E}$ par p n'est pas représenté en vraie grandeur (les antécédents des sommets du grand axe donnent un contre-exemple).

C.1. p_0 est une application linéaire de P_0 dans $\mathbb{R}^2$. Son noyau est constitué des éléments de P_0 dans le noyau de p c'est à dire des vecteurs simultanément colinéaires et orthogonaux à $\vec{v}$. Seul le vecteur nul convient et p_0 est injective. Comme elle va d'un espace de dimension 2 dans un espace de dimension 2, c'est un isomorphisme de P_0 dans $\mathbb{R}^2$.

C.2.

- s va bien de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $s^{-1} = p_1^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ p_0^{-1} = p_0 \circ \sigma \circ p_1 = s$. s est donc une involution linéaire de $\mathbb{R}^2$.
- s est donc la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - Id)$ de direction $\text{Ker}(s + Id)$. Ses sous espaces propres sont $E_1(s) = \text{Ker}(s - Id)$ et $E_{-1}(s) = \text{Ker}(s + Id)$. On a $s(x) = x$ si et seulement si $\sigma(p_1(x)) = p_1(x)$ c'est à dire si et seulement si $p_1(x) \in E_1(\sigma)$ ou encore $x \in p_0(E_1(\sigma))$. C'est la même chose pour l'autre sous-espace :

$$E_1(s) = p_0(E_1(\sigma)) \quad \text{et} \quad E_{-1}(s) = p_0(E_{-1}(\sigma))$$

- On a $p(\Sigma) = \mathcal{E}$ et comme $\Sigma \subset P_0$ ceci s'écrit aussi $p_0(\Sigma) = \mathcal{E}$ ou encore $\Sigma = p_1(\mathcal{E})$. Comme p_0 est bijective, on a

$$s(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E} \iff \sigma(p_1(\mathcal{E})) \subset p_1(\mathcal{E})$$

ce qui équivaut bien à Σ stable par σ .

3 Balayage de $p(S)$ par des cercles.

A. En revenant aux coordonnées, un calcul élémentaire montre que

$$(p \circ \Gamma)'(t) = p(\Gamma'(t))$$

Si $\Gamma'(t_0)$ n'est pas dans $\text{Vect}(\vec{v}) = \text{Ker}(p)$, on a donc $(p \circ \Gamma)'(t_0)$ qui est non nul. $p(\Gamma(t_0))$ est donc régulier et la tangente à l'arc est dirigée par $(p \circ \Gamma)'(t_0)$.

B.1. Un élément $(x, y, R \sin(\delta))$ est sur S si et seulement si $x^2 + y^2 = R^2 \cos^2(\delta)$. L'intersection de (S) et du plan $z = R \sin(\delta)$ est donc un cercle de centre $(0, 0, R \sin(\delta))$ et de rayon $R \cos(\delta)$. En paramétrant ce cercle dans le plan, on obtient un paramétrage de $\mathcal{C}_\delta$:

$$\phi \mapsto M_\delta(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos(\delta) \cos(\phi) \\ R \cos(\delta) \sin(\phi) \\ R \sin(\delta) \end{pmatrix}$$

B.2. On peut trouver un élément dans P_0 et C_δ si et seulement si on peut trouver ϕ tel que $(\overrightarrow{OM_\delta(\phi)}|\vec{v}) = 0$ c'est à dire si et seulement si il existe ϕ tel que

$$\cos(\delta) \cos(\phi - \theta) + \sin(\delta) = 0$$

Si $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$, ceci n'a pas lieu. Pour $\delta \in]-\pi/2, \pi/2[$, la relation s'écrit $\cos(\phi - \delta) = -\tan(\delta)$ et ϕ existe si et seulement si $|\tan(\delta)| \leq 1$ c'est à dire $|\delta| \leq \pi/4$.

Si $|\delta| < \pi/4$, deux valeurs de ϕ conviennent qui sont

$$\delta \pm \arccos(-\tan(\delta))$$

L'une d'elle est dans $[\delta, \delta + \pi]$ et l'autre dans $[\delta - \pi, \delta]$. Elles ne sont pas égales modulo 2π car $\arccos(-\tan(\delta)) \neq 0$ et correspondent à deux points distincts de C_δ .

B.3. On a $M \in P_0 \cap C_\delta \subset P_0 \cap S = \Sigma$.

P_0 est un plan vectoriel (il contient donc l'origine) qui contient M . Il contient donc $\overrightarrow{OM}$ et, par définition de P_0 , ce vecteur est donc orthogonal à $\vec{v}$.

On a $\frac{dM_\delta}{d\phi}(\phi) = \begin{pmatrix} -R \cos(\delta) \sin(\phi) \\ R \cos(\delta) \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est toujours orthogonal à $\overrightarrow{OM_\delta(\phi)}$ (produit scalaire nul).

Σ est un cercle de centre O dans le plan P_0 . Un vecteur tangent à Σ en M est contenu dans P_0 et est orthogonal à $\overrightarrow{OM}$ (la tangente au cercle est orthogonale au rayon).

B.4. $p(C_\delta)$ est paramétré par $\phi \mapsto (R \cos(\delta) \cos(\phi) - R \sin(\delta) \cos(\theta), R \cos(\delta) \sin(\phi) - R \sin(\delta) \sin(\theta))$. C'est un cercle de centre

$$\Omega_\delta = (R \sin(\delta) \cos(\theta), R \sin(\delta) \sin(\theta))$$

et de rayon

$$R_\delta = R \cos(\delta)$$

La réunion des C_δ pour $\delta \in [-\pi/2, \pi/2]$ étant égale à S , la réunion de $p(C_\delta)$ est égale à $p(S)$.

On suppose $|\delta| < \pi/4$. On peut trouver (B.2) $\phi_0, \phi_1 \in [0, 2\pi[$ tels que $M_0 = M_\delta(\phi_0)$ et $M_1 = M_\delta(\phi_1)$ soient dans P_0 . Par définition de Σ , $p(M_0)$ et $p(M_1)$ sont sur $\mathcal{E}$ (ce sont des images par p d'éléments de Σ) et ces points sont distincts (un élément de $\mathcal{E}$ possède un unique antécédent par p dans S).

Notons $\vec{T}$ un vecteur tangent en M_i à C_δ et $\vec{T}'$ un vecteur tangent en M_i à Σ (ce sont des vecteurs non colinéaires à $\vec{v}$ ce qui va nous permettre plus bas d'utiliser la question A). $\vec{T}$ est dans l'orthogonal de $\overrightarrow{OM_i}$ et ce vecteur est lui même orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{T}'$ (question B.3). $\vec{T}$ est donc dans le plan $\text{Vect}(\vec{T}', \vec{v})$. Les tangentes à $p(C_\delta)$ et $\mathcal{E} = p(\Sigma)$ en $p(M_i)$ seront dirigées par $p(\vec{T})$ et $p(\vec{T}')$ (question A) et comme $p(\vec{v}) = \vec{0}$, la composante de $\vec{T}$ sur $\vec{v}$ disparaît dans la composition par p et les vecteurs $p(\vec{T})$ et $p(\vec{T}')$ sont colinéaires. $p(C_\delta)$ et $\mathcal{E}$ sont donc tangents en deux points distincts.

Pour $\delta = \pi/4$, c'est la même chose sauf qu'il n'existe qu'un point commun.

B.5. Soient C_1 et C_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 et de rayons R_1 et R_2 . Quitte à inverser les rôles, on peut supposer $R_1 \geq R_2$. On a alors C_2 qui est intérieur à C_1 si $d(O_1, O_2) + R_2 \leq R_1$ et C_2 qui est extérieur à C_1 si $d(O_1, O_2) \geq R_1 + R_2$. Les cercles sont donc sécants quand $R_1 - R_2 \leq d(O_1, O_2) \leq R_1 + R_2$. Ici, on a

$$d(\Omega_\delta, \Omega_{\delta'}) = R |\sin(\delta) - \sin(\delta')|$$

$$R_\delta + R'_{\delta'} = R(\cos(\delta) + \cos(\delta'))$$

$$R_\delta - R'_{\delta'} = R |\cos(\delta) - \cos(\delta')|$$

- Si $0 \leq \delta < \delta' \leq \pi/4$, on veut montrer que

$$\cos(\delta) - \cos(\delta') \leq \sin(\delta') - \sin(\delta) \quad \text{et} \quad \sin(\delta') - \sin(\delta) \leq \cos(\delta) + \cos(\delta')$$

ce qui équivaut à

$$\sin(\delta + \pi/4) \leq \sin(\delta' + \pi/4) \quad \text{et} \quad \sin(\delta' - \pi/4) \leq \sin(\delta + \pi/4)$$

ce qui est vrai pour les valeurs considérées. Les cercles $p(C_\delta)$ et $p(C_{\delta'})$ sont ainsi sécants.

- Si $\pi/4 \leq \delta < \delta' \leq \pi/2$, $R_{\delta'}$ est le plus petit des deux rayons. On veut montrer que

$$\cos(\delta) - \cos(\delta') \geq \sin(\delta') - \sin(\delta)$$

ce qui est vrai car $\sin(\delta + \pi/4) \geq \sin(\delta' + \pi/4)$ (décroissance du sinus sur $[\pi/2, 3\pi/4]$). $p(C_{\delta'})$ est intérieur à $p(C_\delta)$.

C. Voici le dessin demandé.

