

Problème: Nombres et polynômes de Bernoulli

Partie I: Définition des nombres et polynômes de Bernoulli

On appelle *nombres de Bernoulli* les coefficients b_k vérifiant la relation suivante:

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer b_1 , b_2 , b_3 et b_4 .
2. On appelle *polynômes de Bernoulli* les polynômes $B_n(X)$ définis par:

$$\forall n \geq 1, \quad B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k X^{n-k}$$

- a. Donner sous forme développée $B_1(X)$, $B_2(X)$, $B_3(X)$ et $B_4(X)$.
- b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $B'_n(X) = nB_{n-1}(X)$.
- c. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $B_n(1) = B_n(0)$.
- d. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.

Partie II: Utilisation de l'endomorphisme Δ

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons Δ l'application de $\mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

- a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
- b. Δ est-il injectif ? Déterminer $\text{Im}(\Delta)$.
- c. Donner la matrice M de Δ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1; X; X^2; X^3; \dots; X^n)$.
2. Calculer $\Delta(B_n)(X)$.
 - a. Calculer l'image du polynôme $(-1)^n B_n(1-X)$ par Δ .
 - b. En déduire l'égalité $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$.
3. Démontrer qu'à l'exception de b_1 , tous les nombres de Bernoulli d'indice impair sont nuls.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - a. Soient $(k, n) \in \mathbb{N}^*$ et $S_n(k) = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + k^n$. Donner une expression de $S_n(k)$ en fonction de $B_{n+1}(X)$ et $B_{n+1}(0)$.
 - b. En déduire une expression simple de $S_3(k-1)$ pour $k \geq 3$.

Partie III: Développement en série entière de la fonction g

Dans cette partie, nous considérons la fonction $g : \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par:

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(z) = \frac{z}{e^z - 1} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \end{cases}$$

1. Le but de cette question est de montrer que cette fonction est développable en série entière au voisinage de zéro. On suppose l'existence d'une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de $R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que:

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq R \Rightarrow g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}.$$

- a. En considérant la fonction $h : z \mapsto \frac{1}{2}(g(z) - g(-z))$, montrer que pour tout entier naturel $p \geq 1$, $a_{2p+1} = 0$. Calculer a_1 .
 - b. Montrer alors que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k = 0$.
Que constatez-vous?
 - c. Montrer que si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les relations 1.b, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq n!$.
 - d. En déduire que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que sous rayon de convergence, R vérifie $1 \leq R \leq 2\pi$.
2. Montrer, pour tout réel x , que la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto g(z)e^{zx}$ est développable en série entière sur le disque centré en 0 et de rayon R . On notera, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$, $g(z)e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!}$ ce développement en série entière. Nous définissons ainsi une suite de fonctions réelles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 3. Montrer que, $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k x^{n-k}$. Que remarquez-vous alors?

Partie IV: Etude d'une série de Fourier

Pour tout entier naturel n , on désigne par $\overline{B}_n$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est 1-périodique, dont la restriction à $]0; 1[$ est B_n et telle que $\overline{B}_n(0) = \frac{1}{2}(B_n(0) + B_n(1))$.

1. On s'intéresse dans cette question à la régularité des fonctions $\overline{B}_n$.
 - a. Expliciter $\overline{B}_0$. Expliciter $\overline{B}_1(x)$ pour tout réel x et vérifier que $\overline{B}_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
 - b. Si $n \geq 2$, montrer que $\overline{B}_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
 - c. Trouver une relation entre $\overline{B}_n'$ et $\overline{B}_n$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2. Etudier la parité de $\overline{B}_n$ suivant celle de n (on pourra raisonner par récurrence).
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\forall f \in \mathcal{C}^1(]0; 1[), \quad \alpha_n(f) = 2 \int_0^1 f(t) \cos(2n\pi t) dt; \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = 2 \int_0^1 f(t) \sin(2n\pi t) dt.$$

- a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, trouver une relation de récurrence entre $\alpha_n(\overline{B}_{k+1})$ et $\beta_n(\overline{B}_k)$.
 - b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, trouver une relation de récurrence entre $\beta_n(\overline{B}_{k+1})$ et $\alpha_n(\overline{B}_k)$.
 4. On s'intéresse à présent à la convergence de la série de Fourier.
 - a. Calculer $\alpha_0(\overline{B}_{2k})$ et $\beta_n(\overline{B}_1)$.
 - b. Pour n et k entiers naturels non nuls, calculer $\beta_n(\overline{B}_{2k+1})$ et $\alpha_n(\overline{B}_{2k})$ en fonction de n et k .
 - c. Etudier la convergence, sur $\mathbb{R}$, des séries de Fourier des $\overline{B}_k$.
- En déduire les développements:

$$\begin{cases} \forall k \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, & 2^{2k-1} \pi^{2k} \overline{B}_{2k}(x) = (-1)^{k-1} (2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{n^{2k}} \\ \forall k \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, & 2^{2k} \pi^{2k+1} \overline{B}_{2k+1}(x) = (-1)^{k-1} (2k+1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n^{2k+1}} \end{cases}$$

5. On désigne par $\zeta(x)$ la somme de la série

$$\zeta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

- a. Exprimer $\zeta(2k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ en fonction de b_{2k} .
- b. En déduire les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.