

Solution du problème sur les nombres et polynômes de Bernoulli

Partie I: Définition des nombres et polynômes de Bernoulli

1. Nous savons que $b_0 = 1$. b_1 est donné par la relation: $\binom{2}{0}b_0 + \binom{2}{1}b_1 = 0$, soit $b_1 = -\frac{1}{2}$. b_2 vérifie la relation $\binom{3}{0}b_0 + \binom{3}{1}b_1 + \binom{3}{2}b_2 = 0$ d'où l'on obtient $b_2 = \frac{1}{6}$. b_3 vérifie $\binom{4}{0}b_0 + \binom{4}{1}b_1 + \binom{4}{2}b_2 + \binom{4}{3}b_3 = 0$, soit $b_3 = 0$. Enfin, b_4 vérifie $\binom{5}{0}b_0 + \binom{5}{1}b_1 + \binom{5}{2}b_2 + \binom{5}{3}b_3 + \binom{5}{4}b_4 = 0$, soit $1 - 5/2 + 10/6 + 5b_4 = 0$ d'où l'on tire $b_4 = -1/30$.

2.a. Nous avons: $B_1(X) = x - \frac{1}{2}$. $B_2(X) = x^2 - x + \frac{1}{6}$. $B_3(X) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. $B_4(X) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$.

2.b. Remarquons que $(n-k)\binom{n}{k} = (n-k) \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{n!}{k!(n-1-k)!} = n\binom{n-1}{k}$. La fonction $X \mapsto B_n(X)$ étant une fonction polynomiale, elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc en dérivant, nous obtenons:

$$B'_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)b_k \binom{n}{k} X^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} nb_k \binom{n-1}{k} X^{n-1-k} = nB_{n-1}(X).$$

2.c. $B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k = b_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k$. Or, par construction des b_k , nous avons $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$ donc $B_n(1) = b_n = B_n(0)$.

2.d. Raisonnons par récurrence. Posons $\mathcal{P}_n$ la propriété $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.

Montrons que $\mathcal{P}_1$ est vraie. Par 2.a, $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ donc $B_n(X+1) - B_n(X) = (x+1) - \frac{1}{2} - (X - \frac{1}{2}) = 1 = 1 \times X^0$, donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Considérons à présent $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie. La fonction $g : x \mapsto B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X)$ est une fonction polynomiale, donc est dérivable. Nous avons alors:

$$g'(X) = \frac{d}{dX} (B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X)) = (B'_{n+1}(X+1) - B'_{n+1}(X)) = (n+1)(B_n(1+X) - B_n(X)) \quad (\text{par 2.b}).$$

Ainsi, par hypothèse de récurrence:

$$g'(X) = \frac{d}{dX} (B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X)) = (n+1)nX^{n-1}.$$

Les fonctions polynomiales étant continues, elles sont intégrables; en intégrant entre 0 et X , nous obtenons:

$$\int_0^X g'(t)dt = \int_0^X (n+1)nt^{n-1}dt. \text{ soit } g(X) - g(0) = (n+1)X^n.$$

Or, $g(X) - g(0) = B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) - (B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)) = B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X)$ puisque, par 2.c. $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$. Ainsi nous prouvons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Il s'ensuit, par le théorème de la récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Partie II: Utilisation de l'endomorphisme Δ

1.a.

Méthode Pour montrer que c'est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$, il faut vérifier que $\Delta : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$ est linéaire.

Déjà, nous constatons que l'image d'un polynôme de degré au plus n par Δ est un polynôme de degré au plus n , et donc $\Delta : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\Delta(P)(X) + \mu\Delta(Q)(X) \end{aligned}$$

Ainsi, nous en déduisons que Δ est bien linéaire, et donc Δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

1.b.

Méthode Il n'est pas difficile de se convaincre, au brouillon, que $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{C}$, mais plus difficile de le démontrer! Il y a une astuce: $P(X+1) - P(X)$ est un polynôme, et si $P \in \text{Ker}(\Delta)$, alors le polynôme $P(X+1) - P(X) = 0$, soit $P(X+1) = P(X)$. Si P n'est pas constant, alors il existe une racine dans $\mathbb{C}$ et donc...

Considérons $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $P \in \text{Ker}(\Delta)$. Alors $P(X+1) - P(X) = 0$, soit encore $P(X+1) = P(X)$.

Si $\deg(P) = 0$, alors $P \in \text{Ker}(\Delta)$ d'où $\mathbb{C} \subset \text{Ker}(\Delta)$.

Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{C}$. Pour cela, supposons qu'il existe $P \in \text{Ker}(\Delta)$ avec $\deg(P) = n > 0$. Or, $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos, il existe λ racine de P . Or, $P \in \text{Ker}(\Delta) \Rightarrow \forall X \in \mathbb{C}, P(X+1) = P(X)$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, (\lambda + k)$ est racine de P . Ainsi, P admet une infinité de racine et c'est donc le polynôme nul, ce qui contredit $\deg(P) = n > 0$.

Nous en déduisons alors que $\text{Ker}(\Delta) = \mathbb{C}$. En particulier, Δ n'est pas injectif.

Rappelons que l'on peut soit invoquer le fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, soit le théorème de d'Alembert:

Théorème 1 (Théorème de d'Alembert)

Tout polynôme à coefficient complexe non constant admet une racine complexe.

Etudions l'image de Δ .

Il faut tout de suite penser au théorème du rang: $\dim(\text{Im}(\Delta)) = n$ car $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n+1$ et $\dim(\text{Ker}(\Delta)) = 1$.

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Ainsi $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors $P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^n a_k ((X+1)^k - X^k)$. Or $\forall k \in \mathbb{N}, (X+1)^k - X^k = \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \right) - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$. Ainsi, nous en déduisons que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$. Il s'ensuit que $\text{Im}(\Delta) \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Or, $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est espace vectoriel complexe de dimension n .

En appliquant le théorème du rang à l'endomorphisme Δ , nous avons: $\dim(\text{Im}(\Delta)) = \dim(\mathbb{C}_n[X]) - \dim(\text{Ker}(\Delta)) = (n+1) - 1 = n$.

Puisque $\text{Im}(\Delta)$ est inclu $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et qu'ils ont même dimension, nous en déduisons qu'il sont égaux, soit $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

1.c.

Méthode Les colonnes de la matrice sont données par les images des vecteurs de la base.

$\Delta(1) = 0$ (car $1 \in \mathbb{C} = \text{Ker}(\Delta)$). $\Delta(X) = X+1-X = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}^*, (X+1)^k - X^k = \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \right) - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$. Nous en déduisons alors:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{k}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \vdots & 0 & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{k}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \binom{k}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Par I.2.d. nous avons $\Delta(B_n)(X) = nX^{n-1}$.

2.a. Nous savons que Δ est un endomorphisme, donc est linéaire. Aussi, avons-nous:

$$\begin{aligned} \Delta((-1)^n B_n(1-X)) &= (-1)^n B_n(-X) - (-1)^n B_n(1-X) \\ &= (-1)^n (B_n(-X) - B_n(1-X)) \\ &= (-1)^{n+1} n(-X)^{n-1} \quad \text{par I.2.d. appliquée à } (-X) \\ &= nX^{n-1} \end{aligned}$$

2.b. Nous constatons que (2. et 2.a.) $\Delta(B_n)(X) = \Delta((-1)^n B_n(1-X))$, ainsi par linéarité de l'application Δ , nous avons: $\Delta(B_n(X) - (-1)^n B_n(1-X)) = 0$, soit encore $B_n(X) - (-1)^n B_n(1-X) \in \text{Ker}(\Delta) = \mathbb{C}$. Le

polynôme $B_n(X)$ étant à coefficient réel, nous en déduisons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B_n(X) - (-1)^n B_n(1-X) = \lambda$.

Méthode Cette condition est assez simple à trouver: reste à pouvoir l'exploiter, i.e. montrer que $\lambda = 0$, ce qui est assez astucieux! Pour ce faire, il faut commencer par utiliser la relation $B_n(1) = B_n(0)$ (le couple $(X; 1-X)$ devant vous y faire penser!...

Pour $X = 0$ et $X = 1$, nous obtenons:

$$\begin{cases} (-1)^n B_n(1) - B_n(0) &= \lambda \\ (-1)^n B_n(0) - B_n(1) &= \lambda \end{cases}$$

Raisonnons par disjonction des cas:

Si $n = 2k$ est pair, alors nous obtenons $\lambda = 0$ et $B_{2k}(1-X) = B_{2k}(X)$.

Sinon, $n = 2k-1$ est impair et les deux équations sont identiques. Néanmoins, par le cas pair, nous avons: $B_{2k}(1-X) = B_{2k}(X)$, soit en dérivant: $-B'_{2k}(1-X) = B'_{2k}(X)$. Or, par I.2.b. nous avons $B'_{2k}(X) = 2kB_{2k-1}(X)$ donc nous obtenons:

$$-2kB_{2k-1}(1-X) = 2kB_{2k-1}(X) \Leftrightarrow -B_{2k-1}(1-X) = B_{2k-1}(X).$$

Il s'ensuit donc que nous obtenons la relation:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X).$$

3. Appliquons cette relation à $X = 0$: nous obtenons alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$. Dans le cas $n = 2k+1$, cela implique $B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0) = 0$ (car nous avons aussi la relation $B_n(1) = B_n(0)$). Or, $B_{2k+1}(0) = b_{2k+1}$ d'où nous en déduisons que, $\forall k \in \mathbb{N}^*, b_{2k+1} = 0$. Ainsi, hormis b_1 , tous les b_i d'indice impair sont nuls.

4.a. Nous avons par I.2.d: $B_{n+1}(1+X) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n$. Appliquons cette relation à $X \in \{1, \dots, k\}$, nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) &= 0 \\ B_{n+1}(2) - B_{n+1}(1) &= (n+1)1^n \\ B_{n+1}(3) - B_{n+1}(2) &= (n+1)2^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{n+1}(k) - B_{n+1}(k-1) &= (n+1)(k-1)^n \\ B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k) &= (n+1)k^n \end{aligned}$$

Ainsi, en sommant, nous avons (le membre de gauche étant une série télescopique)

$$B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(0) = (n+1)(1^n + 2^n + \dots + k^n).$$

Nous obtenons ainsi:

$$S_n(k) = \frac{1}{n+1} (B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(0)).$$

$$4.b. \quad S_3(k-1) = \frac{1}{4} (B_4(k+1) - B_4(0)) = \frac{1}{4} (k^4 - 2k^3 + k^2) = \frac{k^2(k-1)^2}{4}.$$

Partie III: Développement en série entière de la fonction g

1.a. $h(z) = \frac{1}{2} (g(z) - g(-z)) = \frac{z}{2} \left(\frac{1}{e^z - 1} + \frac{1}{e^{-z} - 1} \right) = \frac{z}{2} \left(\frac{e^{-z}}{1 - e^{-z}} + \frac{1}{e^{-z} - 1} \right) = -\frac{z}{2}$. Ainsi, si g est développable en série entière au voisinage de 0, alors il en va de même de la fonction h (par théorème sur les opérations algébriques sur les D.S.E.). Il s'ensuit alors que

$$h(z) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (-z)^n \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} (z^n + (-1)^{n+1} z^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Or, par unicité du développement en série entière, nous avons: $h(z) = -\frac{1}{2}z$. Ainsi, en identifiant, nous en déduisons que, $\forall k \in \mathbb{N}^*, a_{k+1} = 0$ et $a_1 = -1/2$.

1.b. Partons de l'égalité: $(e^z - 1)g(z) = z$. La fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ et nous avons alors:

$$(e^z - 1)g(z) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \right) = z.$$

Nous développons à gauche en utilisant le produit de Cauchy pour obtenir:

$$(e^z - 1)g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k \right) \frac{z^n}{n!}$$

Or, par unicité du développement en série entière, puisque $(e^z - 1)g(z) = z$, nous en déduisons que $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k = 0$.

Nous constatons que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

1.c. Démontrons cette inégalité par récurrence forte sur n . Pour $n = 0$, comme par convention $0! = 1$, l'inégalité est bien vérifiée.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$ fixé et supposons que, $\forall k \in \{0; \dots; n\}, |a_k| \leq k!$. Puisque la suite (a_n) vérifie les conditions

1.b. nous en déduisons que $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k} a_k = 0$. Ainsi, $(n+2)a_{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} a_k = 0$. Il vient alors:

$$|a_{n+1}| = \frac{1}{n+2} \left| \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n+2-k)!} |a_k| \leq \left| \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n+2-k)!} k! \right| = \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(n+2-k)!}.$$

Nous obtenons alors la majoration:

$$|a_{n+1}| \leq (n+1)! \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} = (n+1)! (e^1 - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}).$$

Or, $2 < e^1 < 3$ donc $e^1 - 2 < 1$ d'où $|a_{n+1}| \leq (n+1)!$ ce qui permet de conclure en utilisant le théorème de la récurrence.

1.d. Puisque $|a_n| \leq n!$, nous déduisons que la suite $|\frac{a_n}{n!} 1^n|$ est bornée, et donc par définition du rayon de convergence R de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, nous avons $R \geq 1$.

Définition 1 (Rayon de convergence)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors le réel $R = \sup\{r \geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence de la série entière. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente si $|z| < R$, divergente si $|z| > R$. Enfin, pour tout réel $r \in]0; R[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R\}$. Le disque de convergence est le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C}; |z| < R\}$.

Par l'absurde, si $R > 2\pi$, alors la série entière serait continue en $2i\pi$, ce qui est absurde car $g(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ n'est pas définie en $2i\pi$.

2. Pour tout réel x , l'application $z \mapsto e^{zx}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, et comme le produit de deux fonctions développables en séries entières est développable en série entière (et à un rayon au moins égal au plus petit rayon des deux séries entières initiales), nous en déduisons que $z \mapsto g(z)e^{zx}$ admet un développement en série entière, de rayon de convergence au moins R . On a donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}, |z| < R \Rightarrow g(z)e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

3. Considérons $|z| < R$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant les D.S.E. des fonctions $z \mapsto g(z)$ et $z \mapsto e^{xz}$, nous avons:

$$g(z)e^{xz} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tz)^n}{n!} \right).$$

Par produit de Cauchy des deux séries entières, nous obtenons $\forall n \in \mathbb{N}, A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k x^{n-k}$. Puisque $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = b_k$, nous en déduisons que $A_n = B_n$ (i.e. se sont les polynômes de Bernoulli!).

Partie IV: Etude d'une série de Fourier

1.a. Puisque B_0 est le polynôme constant égal à 1, nous en déduisons que $\overline{B_0}$ est une fonction constante égale à 1.

Nous avons que $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\overline{B_1}(x) = \overline{B_1}(x - [x]) = x - [x] - \frac{1}{2}$ (on désigne par $[x]$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique entier $[x]$ vérifiant $[x] \leq x < [x] + 1$). On remarque alors que $0 \leq x - [x] < 1$ et donc $\overline{B_1}(x - [x])$ a bien un sens. Puisque $\overline{B_1}$ est localement polynomiale (sur les intervalles ne contenant pas d'entier naturel), nous en déduisons que $\overline{B_1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (elle est même $\mathcal{C}^\infty$).

1.b. Montrons que $\overline{B_n}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Déjà, ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Or, par I.2.b. pour $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$ et nous déduisons donc la continuité de $\overline{B_n}$ en 0 et 1, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Montrons que $\overline{B_n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Puisque $\overline{B_n}(x) = B_n(x - [x])$, nous nous restreignons à l'étude de la dérivabilité sur $]0; 1[$. Puisque par I.2.a. $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$, par une récurrence implicite nous obtenons que $\forall n \geq 2$, $\overline{B_n}$ est dérivable sur $]0; 1[$ et de dérivée continue, donc est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

1.c. De la propriété I.2.b. nous déduisons que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\overline{B_n}'(x) = n\overline{B_{n-1}}(x)$.

2. B_0 étant constante, elle est paire ($B_0(-x) = B_0(x) = 1$). Considérons $\overline{B_1}$. $\forall x \in]-1; 0[$, nous avons $1 + x \in]0; 1[$ et donc par 1-périodicité, $\overline{B_1}(x) = \overline{B_1}(1 + x) = x + 1 - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} = -(-x - \frac{1}{2}) = -\overline{B_1}(-x)$ donc la fonction $\overline{B_1}$ est impaire.

Montrons par récurrence que $\overline{B_n}$ soit de la parité de n . Cette hypothèse est vérifiée pour les cas $n \in \{0; 1\}$. Supposons là alors vérifiée pour $n \in \mathbb{N}$ et démontrons qu'elle est alors vraie pour $n + 1$.

Considérons alors la fonction $f(x) = \overline{B_{n+1}}(x) + (-1)^n \overline{B_{n+1}}(-x)$. Par la question 1.b, cette fonction est continue et 1-périodique sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (par théorème d'opérations algébriques sur l'ensemble des fonctions dérivables et 1-périodique) et sa dérivée vérifie $f'(x) = (n+1)(\overline{B_n}(x) + (-1)^n \overline{B_n}(-x)) = 0$ par hypothèse de récurrence. Il s'ensuit alors que la fonction f est constante, et comme $f(0) = \overline{B_{n+1}}(0) + (-1)^n \overline{B_{n+1}}(0) = (1 + (-1)^n)b_{n+1}$. Si n est pair, alors $b_{n+1} = 0$ (par II.3.) et sinon n est impaire et alors $(1 + (-1)^n) = 0$. Ainsi, dans chacun de deux cas, $f(0) = 0$, d'où $\overline{B_n}$ est de même parité que n .

3. Si $k \geq 1$, $\overline{B_{k+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ donc en intégrant par partie, nous obtenons:

$$\alpha_n(B_{k+1}) = 2 \int_0^1 \overline{B_{k+1}}(t) \cos(2n\pi t) dt = 2 \left[\overline{B_{k+1}}(t) \frac{\sin(2n\pi t)}{2n\pi} \right]_0^1 - \frac{k+1}{n\pi} \int_0^1 \overline{B_k}(t) \sin(2n\pi t) dt = -\frac{k+1}{2n\pi} \beta_n(\overline{B_k}).$$

De même, en effectuant une intégration par partie, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \beta_n(\overline{B_{k+1}}) &= 2 \int_0^1 \overline{B_{k+1}}(t) \sin(2n\pi t) dt = 2 \left[\overline{B_{k+1}}(t) \frac{-\cos(2n\pi t)}{2n\pi} \right]_0^1 + \frac{k+1}{n\pi} \int_0^1 \overline{B_k}(t) \cos(2n\pi t) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} [\overline{B_{k+1}}(0) - \overline{B_{k+1}}(1)] + \frac{k+1}{n\pi} \int_0^1 \overline{B_k}(t) \cos(2n\pi t) dt = \frac{k+1}{n\pi} \int_0^1 \overline{B_k}(t) \cos(2n\pi t) dt. \end{aligned}$$

car par I.1.b. pour $k \geq 1$, $B_{k+1}(0) = B_{k+1}(1)$ donc par définition, $\overline{B_{k+1}}(0) = \frac{1}{2}(B_{k+1}(0) - B_{k+1}(1)) = B_{k+1}(0) = B_{k+1}(1)$.

Finalement, nous obtenons:

$$\alpha_n(B_{k+1}) = -\frac{k+1}{2n\pi} \beta_n(\overline{B_k}); \quad \beta_n(\overline{B_{k+1}}) = \frac{k+1}{2n\pi} \alpha_n(\overline{B_k}).$$

4.a. $\alpha_0(\overline{B_{2k}}) = 2 \int_0^1 \overline{B_{2k}}(t) dt = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) dt = 2 \left[\frac{B_{2k+1}(t)}{2k+1} \right]_0^1 = 2\delta_{k,0}$ par I.1.c. De même nous avons:

$$\beta_n(\overline{B_1}) = 2 \int_0^1 (t)_0^1 \overline{B_1}(t) \sin(2n\pi t) dt = 2 \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \sin(2n\pi t) dt = -\frac{1}{n\pi} \left[(t - \frac{1}{2}) \cos(2n\pi t) \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(2n\pi t) dt = -\frac{1}{n\pi}.$$

4.b. Calculons à présent $\beta_n(\overline{B_{2k+1}})$. En utilisant les relations obtenues en 3, nous avons:

$$\beta_n(\overline{B_{2k+1}}) = \frac{2k+1}{2n\pi} \alpha_n(\overline{B_k}) = \frac{2k+1}{2n\pi} \times \left(-\frac{2k}{2n\pi} \beta_n(\overline{B_{2k-1}}) \right).$$

Ainsi en déduisons-nous que $\beta_n(\overline{B_{2k+1}}) = (-1)^{k-1} \frac{(2k+1)!}{2^{2k} (n\pi)^{2k+1}}$.

Nous procédons de même pour $\alpha_n(\overline{B_{2k}})$, nous obtenons:

$$\alpha_n(\overline{B_{2k}}) = -\frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} \alpha_n(\overline{B_{2k-2}}) = (-1)^k \frac{(2k)!}{(2n\pi)^{2k-1}} \beta_n(\overline{B_1}) = (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{2^{2k-1} (n\pi)^{2k}}.$$

4.c.

Théorème 2 (Théorème de convergence normale de la série de Fourier (pour f 2π -périodique))

Si f est une fonction continue 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f . La suite $(S_n(f))$ définie par

$$S_n(f)(t) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k(f) \cos(kt) + \beta_k(f) \sin(kt))$$

converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Nous déduisons du théorème de convergence normal que la série de Fourier des fonctions $\overline{B}_k$, pour $k > 1$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$ et ont pour somme $\overline{B}_k$ puisque ces fonctions vérifient les hypothèses du théorème (question 1.b).

Pour $\overline{B}_1$, nous devons recourir au théorème de Dirichlet qui nous assure la convergence simple de la série de Fourier, dont la somme est $\frac{1}{2}(\overline{B}_1(x^+) - \overline{B}_1(x^-))$.

Théorème 3 (Théorème de Dirichlet)

Si f est une fonction continue par morceaux, 2π périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors sa série de Fourier (S_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , sa somme $\tilde{f}$ au point x est $\frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (f(x + \epsilon) + f(x - \epsilon))$. Si f est continue en x , alors $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Nous obtenons alors bien les développements proposés de la série de Fourier de $\overline{B}_{2k}$ et $\overline{B}_{2k+1}$ (on utilise aussi le fait que, puisque $\overline{B}_{2k}$ est paire, les $\beta_n(\overline{B}_{2k})$ sont nuls, et de même pour $\overline{B}_{2k+1}$, les coefficients $\alpha(\overline{B}_{2k+1})$ sont nuls).

5.a. Dans la premier développement, pour $x = 0$, nous avons: $2^{2k-1}\pi^{2k}\overline{B}_{2k}(0) = (-1)^{k-1}(2k)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, soit $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!} \overline{B}_{2k}(0) = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}}{(2k)!} b_{2k}$.

5.b. Pour $k = 1$, sachant que $b_2 = \frac{1}{6}$, nous obtenons: $\zeta(2) = \frac{2\pi^2}{2} b_2 = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour $k = 2$, nous obtenons: $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.