

Solution du problème sur la décomposition de Dunford

Préliminaires

1. Soient $P(X) = \sum_{i=0}^p p_i X^i$ et $Q(X) = \sum_{j=0}^q q_j X^j$. Alors le produit PQ est un polynôme de degré $p+q$ et nous avons:

$$(PQ)(X) = P(X) \times Q(X) = \left(\sum_{i=0}^p p_i X^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^q q_j X^j \right) = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^k p_i q_{k-i} \right) X^k.$$

Ainsi, $(PQ)(f) = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^k p_i q_{k-i} \right) f^k$. D'autre part:

$$P(f) \circ Q(f) = \left(\sum_{i=0}^p p_i f^i \right) \circ \left(\sum_{j=0}^q q_j f^j \right) = \sum_{i=0}^p p_i \left(f^i \circ \left(\sum_{j=0}^q q_j f^j \right) \right) = \sum_{i=0}^p p_i \left(\sum_{j=0}^q q_j f^{i+j} \right) = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^k p_i q_{k-i} \right) f^k.$$

Commentaire Rappelons les structures d'anneaux sous-jacentes: $(\mathbb{C}[X], +, \times)$ est un anneau, tout comme $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ et étant donné un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$, on associe au polynôme $P(X)$ l'endomorphisme $P(f)$ (avec les conventions $f^0 = Id_E$ et $f^k = f \circ f^{k-1}$). Aussi, la composition dans les polynômes d'endomorphismes $(P(f))$ joue-t-elle le même rôle que le produit des polynômes complexes. Enfin, remarquons que tout cela marche très bien car l'application f est linéaire et commute avec elle-même (ainsi $f \circ P(f) = f \circ \sum_{k=0}^n a_k f^k = \sum_{k=0}^n a_k f^{k+1} = (\sum_{k=0}^n a_k f^k) \circ f$).

2. Soit $x \in E$ vecteur propre de f associé à la valeur propre λ . Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, nous avons: $f^i(x) = \lambda^i x$ (on peut démontrer cette relation par récurrence, mais c'est très simple). Ainsi:

$$P(f)(x) = \sum_{i=0}^p p_i f^i(x) = \sum_{i=0}^p p_i \lambda^i x = \left(\sum_{i=0}^p p_i \lambda^i \right) x = P(\lambda)x.$$

Ainsi x est bien un vecteur propre de l'endomorphisme $P(f)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

3.a. Soit λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé à λ . Ainsi, $f(x) = \lambda x$. P est un polynôme annulateur de f , donc $P(f) = 0$; en appliquant cette relation au vecteur x , nous avons par 2. $P(f)(x) = P(\lambda)x = 0$. Comme x vecteur propre, alors $x \neq 0$ et donc $P(\lambda) = 0$: ainsi, la valeur propre λ est bien une racine de P .

A retenir: Un vecteur propre x n'est jamais nul, alors que la valeur propre λ elle, peut l'être.

3.b. La réciproque est évidemment fausse: si μ est racine de Q et $Q(f) = 0$ alors μ n'est pas nécessairement une valeur propre de f . Pour ce faire, considérons P un polynôme annulateur de f (nous savons qu'il en existe un par le théorème de Cayley-Hamilton) et soit μ une valeur qui n'est pas valeur propre de f . Alors le polynôme $Q(X) = P(X) \times (X - \mu)$ est aussi un polynôme annulateur de f .

4. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Alors $\forall j \neq i, j \in \{1, \dots, p\}$, nous avons clairement $L_i(\lambda_j) = 0$ et $L_i(\lambda_i) = 1$. Ainsi, $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$. Nous reconnaissons ici les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Partie 1: Lemme des noyaux

1.a. Soit $x \in \text{Ker}(P(f))$. Ainsi $P(f)(x) = 0$. Alors par 0.1. nous avons:

$$(PQ)(f)(x) = (P(f) \circ Q(f))(x) = (Q(f) \circ P(f))(x) = Q(f)(P(f)(x)) = Q(f)(0) = 0.$$

car $Q(f) \in \mathcal{L}(E)$ donc par linéarité $Q(f)(0) = 0$. Il en va de même de $y \in \text{Ker}(P(f))$ d'où par linéarité de l'endomorphisme $(PQ)(f)$, nous en déduisons que $(PQ)(f)(x+y) = (PQ)(f)(x) + (PQ)(f)(y) = 0$.

Commentaire En partant de l'expression $(PQ)(f)(x+y)$, vous avez deux possibilités: soit dire que $(PQ)(f) \in \mathcal{L}(E)$ et donc est linéaire pour casser la somme $(x+y)$ en deux, soit scinder le polynôme (PQ) en deux en utilisant le préliminaire...

1.b. Si $P \wedge Q = 1$, alors d'après le théorème de Bezout (pour les polynômes), il existe (au moins) un couple $(U; V)$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que $UP + VQ = 1$. Ainsi, en appliquant cette relation à l'endomorphisme f , nous avons: $U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = Id_E$.

Soit $x \in \text{Ker}(P(f)) \cap \text{Ker}(Q(f))$, donc $P(f)(x) = 0$ et $Q(f)(x) = 0$. Ainsi, en appliquant la précédente relation à x , nous obtenons:

$$(U(f) \circ P(f))(x) + (V(f) \circ Q(f))(x) = x \Leftrightarrow 0 = x.$$

Aussi en déduisons-nous que $\text{Ker}(P(f)) \cap \text{Ker}(Q(f)) = \{0\}$.

Commentaire Premier entre eux doit vous faire rapidement penser à l'identité de Bezout (les deux autres possibilités: lemme de Gauss et décomposition en facteurs premiers).
Quand vous passer de l'égalité entre polynôme ($U(X)P(X) + V(X)Q(X) = 1$) à cette égalité pour des polynômes d'endomorphismes, on remplace X par f et donc 1 par I_E (en effet, $1 = X^0$ et donc $f^0 = I_E$).

1.c. (★★) Nous savons déjà que la somme des s.e.v. $\text{Ker}(P(f))$ et $\text{Ker}(Q(f))$ est directe et est incluse dans $\text{Ker}(PQ)(f)$. Considérons alors $x \in \text{Ker}(PQ)(f)$. Nous avons alors, d'après la décomposition résultant du théorème de Bezout: $U(f) \circ P(f) + V(f) \circ Q(f) = I_E$. Ainsi, $x = U(f) \circ P(f)(x) + V(f) \circ Q(f)(x)$. On note alors $y = U(f) \circ P(f)(x)$ et $z = V(f) \circ Q(f)(x)$. Nous avons: $Q(f)(y) = Q(f)(U(f) \circ P(f)(x)) = U(f) \circ (QP)(f)(x) = 0$ car $x \in \text{Ker}(PQ)(f)$. Ainsi $y \in \text{Ker}(Q(f))$. De même, nous montrons que $z \in \text{Ker}(P(f))$, et ainsi nous en déduisons que tout élément $x \in \text{Ker}(PQ)(f)$ se décompose comme somme d'un élément de $\text{Ker}(P(f))$ et d'un élément de $\text{Ker}(Q(f))$. Il s'ensuit alors que $\text{Ker}((PQ)(f)) = \text{Ker}(P(f)) \oplus \text{Ker}(Q(f))$.

2.a. Nous allons montrer cette relation par récurrence sur p . Pour $p = 2$, nous l'avons déjà démontrée (question 1.c.). Ainsi, supposons que, pour $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$, pour tout ensemble $\{P_1, \dots, P_p\}$ de polynômes 2 à 2 premiers entre eux, $\text{Ker}(\prod_{k=1}^p P_k)(f) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(P_k(f))$ et considérons l'ensemble $\{P_1, \dots, P_{p+1}\}$ de $(p+1)$ polynômes 2 à 2 premiers entre eux.

Alors considérons les polynômes $Q = \prod_{k=1}^p P_k$ et P_{p+1} . Nous avons alors $Q \wedge P_{p+1} = 1$ puisque tous les p_i ($1 \leq i \leq p$) sont premiers avec P_{p+1} . Ainsi, nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence au rang 2, et obtenons: $\text{Ker}((QP_{p+1})(f)) = \text{Ker}(Q(f)) \oplus \text{Ker}(P_{p+1}(f))$. En appliquant alors l'hypothèse de récurrence au rang p , nous obtenons: $\text{Ker}(Q(f)) = \text{Ker}(\prod_{k=1}^p P_k)(f) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(P_k(f))$ et en remplaçant, nous obtenons la relation au rang $(p+1)$. Ainsi, par le théorème de la récurrence, nous en déduisons que $\forall p \geq 2$, si $\{P_1, \dots, P_p\}$ est un ensemble de p polynômes 2 à 2 premiers entre eux, alors: $\text{Ker}(\prod_{k=1}^p P_k)(f) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(P_k(f))$.

2.b. Si $\prod_{k=1}^p P_k$ est un polynôme annulateur de f , alors $\text{Ker}(\prod_{k=1}^p P_k(f)) = E$, et donc en injectant cette relation dans 2.a. nous déduisons alors $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(P_i(f))$.

2.c. Montrons que $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, alors $\text{Ker}(P_i(f))$ est stable par f . Pour cela, considérons $x \in \text{Ker}(P_i(f))$. Alors $f(x)$ vérifie: $P_i(f)(f(x)) = (P_i(f) \circ f)(x)$. Ainsi, si Q désigne le polynôme $Q: X \mapsto X$, nous avons: $P_i(f)(f(x)) = (P_i Q)(f)(x) = Q P_i(f)(x) = Q(f) \circ P_i(f)(x) = 0$ car $x \in \text{Ker}(P_i(f))$. Donc $\text{Ker}(P_i(f))$ est stable par f , et ainsi la matrice de f relativement à une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(P_i(f))$ est diagonale par bloc.

Commentaire A retenir: être diagonal par bloc, c'est avoir une décomposition de l'espace (en somme direct) telle que chaque s.e.v. est stable par f .

A retenir: tout sous-espace propre est stable par f . On retrouvera ce lien en partie 2: l'endomorphisme est alors diagonalisable, et E est donc somme directe des sous-espaces propres de f . On peut alors redémontrer que tout s.e.v. propre est stable par f (même si f non diagonalisable).

3.a. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $f^2 = f$, alors $f^2 - f = 0$. Ainsi, le polynôme $P(X) = (X^2 - X) = (X - 1)X$ est annulateur de f . On déduit alors du lemme des noyaux que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - I_E)$. L'application f vérifiant $f^2 = f$ est la projection sur $\text{Ker}(f - I_E)$ et parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

3.b. Si $f^2 = I_E$ alors $f^2 - I_E = 0$ et donc le polynôme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est un polynôme annulateur de f . Par le lemme des noyaux, nous obtenons $E = \text{Ker}(f - I_E) \oplus \text{Ker}(f + I_E)$. Les endomorphismes f vérifiant $f^2 = Id$ sont les symétries (de E par rapport à $\text{Ker}(f - I_E)$).

Partie 2: Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

1. Si $1 \leq i \neq j \leq p$, alors $\text{Im}(p_j) \subset \text{Ker}(p_i)$ et donc $p_i \circ p_j = 0$. Sinon, $p_i \circ p_i = p_i$, d'où l'expression $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$.

2. L'endomorphisme f étant supposé diagonalisable, les sous-espaces propres de f sont en somme directe et forment une décomposition de l'espace vectoriel E . Il s'ensuit alors que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{\lambda_i}$.

3.a. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. Déjà, si $x_i \in E_{\lambda_i}$, alors $(f - \lambda_i I_E)(x_i) = 0$. Ainsi, puisque le produit de polynômes d'endomorphisme est commutatif (par question 1 des préliminaires), nous avons $\pi_f(f)(x_i) = \prod_{j=1}^p (f - \lambda_j I_E)(x_i)$.

Pour prouver que $\pi_f(f)$ est un polynôme annulateur de f , il suffit alors d'appliquer la décomposition de E en somme des sous-espaces propres de f (question II.2.). Ainsi, $\forall x \in E$, nous avons $\exists! (x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_p}$ tels que $x = \sum_{i=1}^p x_i$. Alors:

$$\pi_f(f)(x) = \pi_f(f)\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) = \sum_{i=1}^p \pi_f(f)(x_i) = 0.$$

Note: $\pi_f(f)$ est un polynôme d'endomorphisme: c'est donc un endomorphisme!

3.b.

Méthode Pour vous mettre sur la voie: il faut se demander pourquoi R serait dans $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ (alors que k lui est quelconque). Même lorsque k est grand, f^k s'exprime comme un polynôme d'endomorphisme de degré au

plus $p - 1 \dots$ Il faut alors faire le lien avec le théorème de Cayley-Hamilton: $\chi_f(f) = 0$, c'est-à-dire que toutes les puissances de f s'expriment à l'aide d'un polynôme de degré $n - 1$ (on utilise la division euclidienne de X^k par χ_f pour obtenir $f^k = R(f)$ avec $\deg(R) \leq n - 1$).
C'est pas encore cela: on demande $p - 1 \dots$ mais si on remplace χ_f par n'importe quel polynôme annulateur (comme par exemple π_f de la question précédente qui est de degré p), alors là... $X^k = Q(X)\pi_f(X) + R(X)$ avec $\deg(R) < p$ et quand on applique la relation à l'endomorphisme f , comme $\pi_f(f) = 0 \dots$ Bingo!

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, en appliquant le théorème de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $\pi_f(X)$ (qui est de degré p), on en déduit l'existence d'un unique couple (fonction de k) $(Q; R) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que $X^k = Q(X)\pi_f(X) + R(X)$. En appliquant cette relation à l'endomorphisme f , nous déduisons $f^k = Q(f) \circ \pi_f(f) + R(f)$. Comme par 3.a. $\pi_f(f) = 0$, nous obtenons donc $f^k = R(f)$.
Considérons le polynôme $Q(X) = R(X) - \sum_{i=1}^p R(\lambda_i)L_i(X)$; c'est un polynôme de degré au plus $p - 1$ (puisque R et les L_i sont tous des polynômes de degré $p - 1$). Alors, en utilisant la question 4. du préliminaire, nous déduisons que ce polynôme s'annule pour $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, d'où $Q(X)$ est un polynôme de degré $p - 1$ ayant p racines distinctes: il s'ensuit que $Q(X)$ est le polynôme nul. Par suite $R(X) = \sum_{i=1}^p R(\lambda_i)L_i(X)$.

Pour $k = 0$, l'algorithme de la division euclidienne donne $Q = 0$ et $R = 1$ (i.e. $X^0 = 1 = 0 \times \pi_u(X) + 1$). Ainsi en appliquant cette relation à l'endomorphisme f , nous obtenons $R(f) = I_E$. En reprenant l'expression précédente, nous obtenons: $R(X) = \sum_{i=1}^p R(\lambda_i)L_i(X) = \sum_{i=1}^p L_i(X) = 1$. Ainsi, $\sum_{i=1}^p L_i(f) = I_E$.

3.c. En reprenant la définition des L_i (c.f. préliminaires), nous avons bien $\pi_f|_{L_i L_j}$.

Si $i \neq j$, alors puisque $\pi_u(X)|_{L_i L_j(X)}$, nous déduisons $L_i(f) \circ L_j(f) = 0$ (puisque $\pi_f(f) = 0$). Ainsi, en composant la relation $\sum_{j=1}^p L_j(f) = I_E$ par L_i , nous en déduisons que $L_i(f)^2 = L_i(f)$.

Commentaire N'oublions pas que la relation *divisible* est définie à un inversible près. Dans l'arithmétique des entiers, les seuls inversibles (de $\mathbb{Z}$) sont $\{-1; 1\}$, mais dans $\mathbb{C}[X]$, les inversibles sont ... les polynômes constants (car $\mathbb{C}$ est un corps). Ainsi, nous ne nous occupons pas des constantes multiplicatives: seuls les facteurs irréductibles (les $(X - \lambda_i)$) sont importants.

3.d.

Méthode Pour montrer l'isomorphisme: soit on l'écrit à la main (il faut être inspiré), soit on utilise le fait que si $E = A \oplus B = A \oplus C$ alors $B = C$. On se ramène alors à des propriétés d'algèbre linéaire de décomposition de l'espace en somme directe.

D'après le théorème des noyaux, puisque $L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} \left(\frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right)$, nous en déduisons que $\text{Ker}(L_i(f)) = \bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} E_{\lambda_j}$.

Enfin, de π_f annulateur de l'endomorphisme f , nous en déduisons que $\text{Ker}(\pi_f(f)) = E$ et donc, puisque $\pi_f(X) = kL_i(X) \times (X - \lambda_i)$ où $k \in \mathbb{C}^*$, nous déduisons, toujours du théorème des noyaux, que $E = \text{Ker}(L_i(f)) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_i I_E) = \text{Ker}(L_i(f)) \oplus E_{\lambda_i}$. Or, puisque $L_i(f)^2 = L_i(f)$, nous savons que $L_i(f)$ est un projecteur de E , et donc $E = \text{Ker}(L_i(f)) \oplus \text{Im}(L_i(f))$. Il en résulte alors que $\text{Im}(L_i(f))$ et E_{λ_i} sont isomorphes.

e. Partons de $\pi_f(f) = 0$. Ainsi $(f - \lambda_i I_E) \circ L_i(f) = 0$ et donc $\text{Im}(L_i(f)) \subset \text{Ker}(f - \lambda_i I_E) = E_{\lambda_i}$. Or, par d. ils sont isomorphes (donc ont même dimension): ainsi, $\text{Im}(L_i(f)) = E_{\lambda_i}$. Ainsi, ces deux projecteurs ont mêmes base et noyau: ils sont donc identiques. Donc: $L_i(f) = p_i$.

4. Nous savons que $f^k = R(f)$ avec $R(X) = \sum_{i=1}^p R(\lambda_i)L_i(X)$. En calculant $R(\lambda_i)$, nous obtenons $R(\lambda_i) = \lambda_i^k$. Or, $L_i = p_i$ d'où $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k = \sum_{i=1}^p \lambda_i^k p_i$.

5.a. Le polynôme caractéristique de cet endomorphisme est $\chi_g(X) = -X^3 + 3X^2 - 2X = -X(X^2 - 3X + 2) = -X(X - 1)(X - 2)$. Ainsi, les valeurs propres de cet endomorphisme sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$.

5.b. Puisque le polynôme caractéristique est scindé et que les valeurs propres sont simples, nous en déduisons qu'il est diagonalisable.

5.c. Dans le cas des endomorphismes diagonalisables, nous savons que $p_i = L_i(f)$. Ainsi, nous avons:

$$L_0(X) = \frac{(X - 1)(X - 2)}{(0 - 1)(0 - 2)}; \quad L_2(X) = \frac{(X - 0)(X - 2)}{(1 - 0)(1 - 2)}; \quad L_2(X) = \frac{(X - 0)(X - 1)}{(2 - 0)(2 - 1)}.$$

Il s'ensuit alors:

$$L_0(X) = \frac{1}{2}(X^2 - 3X + 2); \quad L_1(X) = -X^2 + 2X; \quad L_2(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X).$$

En calculant, nous obtenons alors:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nous constatons bien que $A_0 + A_1 + A_2 = I_E$.

5.d. A_2 est bien la matrice d'un projecteur puisque $A^2 = A$.

5.e. Nous pouvons calculer A^2 directement par un produit matriciel mais aussi utiliser la formule de la question 4:

$$\text{nous obtenons alors } A^2 = A_1 + 4A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Partie 3: Projecteurs spectraux d'un endomorphisme quelconque

1. Considérons le polynôme caractéristique χ_f de f . Nous avons alors $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i I_E)^{\alpha_i}$; d'après le théorème de Cayley-Hamilton, nous savons que χ_f est un polynôme annulateur de f . Ainsi, d'après le lemme des noyaux, nous en déduisons la somme directe: $E = \bigoplus_{1 \leq j \leq p} N_j$.

2. Puisque si $i \neq j$ $\lambda_i \neq \lambda_j$ et donc $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $(X - \lambda_j)^{\alpha_j}$ sont premiers entre eux. Nous déduisons alors que les polynômes $\{Q_1, \dots, Q_p\}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Ainsi, d'après le théorème de Bezout, il existe $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathbb{C}[X])^p$ tels que $\sum_{i=1}^p U_i Q_i = 1$.

3. La définition des polynômes P_i ainsi que la relation de Bezout impliquent $\sum_{i=1}^p p_i = I_E$. Par définition des polynômes Q_i , nous avons, si $1 \leq i \neq j \leq p$, $\chi_f | Q_i Q_j$.

Or, $\chi_f(f) = 0$ (théorème de Cayley Hamilton). Ainsi, il s'ensuit que $Q_i(f)Q_j(f) = 0$. Or, $p_i \circ p_j = (Q_i(f) \circ P_i(f)) \circ (Q_j(f) \circ P_j(f)) = (Q_i(f) \circ Q_j(f)) \circ (P_i(f) \circ P_j(f)) = 0$ (tous ces polynômes commutent d'après la question 1 du préliminaire).

A présent, composons l'identité de Bezout par p_j , nous en déduisons que $\sum_{i=1}^p p_i \circ p_j = p_j$. Or, si $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$ d'où nous en déduisons que $p_j^2 = p_j$. Ainsi, les p_j sont des projecteurs.

4. Nous allons montrer une double inclusion. Soit $y = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$. Alors $(f - \lambda_i I_E)^{\alpha_i}(y) = (f - \lambda_i I_E)^{\alpha_i} \circ P_i(f)(x) = U_i(f) \circ \chi_f(f)(x) = 0$. Ainsi, $y \in N_i$.

Prouvons l'inclusion réciproque: considérons $x \in N_i$. Puisque $\sum_{j=1}^p p_j = I_E$, nous avons: $x = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_p(x)$. Or, pour tout $j \neq i$, $p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ puisque $(f - \lambda_i)^{\alpha_i} | Q_j(f)$, et donc finalement $x = p_i(x) \in \text{Im}(p_i)$.

Nous en déduisons alors bien l'égalité.

5. Montrons de même en utilisant une double inclusion.

Soit $j \neq i$, alors $N_j \subset \text{Ker}(p_i)$ puisque si $x \in N_j$, alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$ puisque $(f - \lambda_j)^{\alpha_j} | Q_i(f)$. Nous en déduisons alors $\bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} N_j \subset \text{Ker}(p_i)$.

A présent, considérons $x \in \text{Ker}(p_i)$. Alors puisque $\sum_{j=1}^p p_j = I_E$, nous obtenons: $x = \sum_{j \neq i} p_j(x) \in \bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} N_j$.

Ainsi en déduisons-nous $\text{Ker}(p_i) = \bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} N_j$.

6.a. Nous avons $\chi_h(X) = -(X - 2)^2(X - 3)$, donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$ avec $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 1$.

6.b. Le sous-espace propre associé à la valeur propre double (2), est de dimension 1 (i.e. c'est une droite vectorielle). En effet, nous avons:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En résolvant, nous obtenons le sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Commentaire Rappelons quelques propriétés d'un endomorphisme u et de son polynôme caractéristique χ_u . L'endomorphisme u est *trigonalisable* si et seulement si χ_u est un polynôme scindé. Ainsi, un endomorphisme u n'est pas nécessairement trigonalisable dans $\mathbb{R}$ (par exemple $\chi_u(X) = X^2 + 2$) mais l'est toujours dans $\mathbb{C}$ (on peut soit le justifier par le fait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, soit invoquer le théorème de d'Alembert: *Tout polynôme à coefficients complexes et de degré au moins 1 admet une racine*, ce qui implique que tout polynôme à coefficient complexe est scindé sur $\mathbb{C}$). L'endomorphisme u est *diagonalisable* si et seulement si il est scindé et ses sous-espaces propres sont de dimension maximum. Rappelons que si λ est valeur propre d'ordre $\alpha(\lambda)$, alors le s.e.v. propre associé à λ est au moins de dimension 1 (car pour être une valeur propre, il faut un vecteur propre x non nul tel que $u(x) = \lambda x$, et par suite $\mathbb{K}x$ est un s.e.v. propre). Ainsi, nous retrouvons le théorème classique: *Si χ_u est un polynôme scindé à racines simples, alors u est diagonalisable*. En effet, χ_u à racine simple implique que les s.e.v. sont nécessairement maximaux. Dans ce problème, la valeur propre 2 est double mais son espace propre n'est pas de dimension maximale (2): l'endomorphisme n'est pas diagonalisable!

6.c. Nous avons alors $Q_1(X) = (X - 3)$ et $Q_2(X) = (X - 2)^2$. Le couple $(U_1(X) = -(X - 1); U_2 = 1)$ convient.

6.d. La matrice de p_1 est donnée par $-(B - Id)(B - 3Id) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. La matrice de p_2 est donnée par $(B - 2Id)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$. Nous remarquons que nous avons toujours $p_1 + p_2 = I_E$.

Partie 4: Décomposition de Dunford

1.a. Par définition des projecteurs spectraux (partie 3), nous savons que $p_i = P_i(f)$ avec P_i polynôme en f . Aussi, d est un polynôme en f et il en est de même de v .

1.b. Puisque $E = \bigoplus_{i=1}^p N_i$, nous pouvons considérer une base de E formée par la concaténation de p bases des N_i . Sur chaque N_i , d est une homothétie, donc est diagonale. Ainsi d est un endomorphisme diagonal dans cette base, et donc est diagonalisable.

Puisque les p_i sont des polynômes en f , nous en déduisons qu'ils commutent avec f . Aussi pour tout entier naturel i , nous avons: $v^i = \sum_{j=1}^p (f - \lambda_j I_E)^i p_j$. Considérons alors $\alpha = \text{Sup}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$. Nous avons alors $(f - \lambda_i)^\alpha p_i = [(X - \lambda_i)^\alpha P_i](f) = 0$ puisque $\chi_f | (X - \lambda_i)^\alpha P_i$. Ainsi, v est un endomorphisme nilpotent.

1.c. Nous avons déjà clairement $f = d + v$ avec d diagonalisable et v nilpotent. De plus, ces deux endomorphismes commutent puisque ce sont des polynômes en f .

2. Soient p et q deux entiers naturels tels que $d_1^p = d_2^q = 0$. Si d_1 et d_2 commutent, alors $(d_1 - d_2)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} d_1^k (-d_2)^{p+q-k}$. Nous constatons que si $1 \leq k \leq p-1$ alors $d_2^{p+q-k} = 0$ et si $p \leq k \leq p+q$, alors $d_1^k = 0$. Ainsi en déduisons-nous que $(d_1 - d_2)^{p+q} = 0$ et donc $d_1 - d_2$ est nilpotent.

3.a. d' commute avec v' , donc d' commute avec f puisque $f = d' + v'$ donc $d' \circ f = d'^2 + d' \circ v' = d'^2 + v' \circ d' = f \circ d'$. Ainsi, d' commute avec d et v qui sont des polynômes en f . Comme d et d' sont diagonalisables, il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à d et d' . Par suite, $d - d'$ est diagonalisable.

Théorème 1 (Condition de co-diagonalisation)

La famille $(u_i)_{i \in I}$ d'endomorphismes de E est simultanément diagonalisable ssi chaque u_i est diagonalisable pour tout i et si les u_i commutent deux à deux.

3.b. Puisque $f = d + v = d' + v'$, nous en déduisons que $d - d' = v - v'$. Par par 3.a. $d - d'$ est diagonalisable et $v - v'$ est nilpotente par 2. d'où nous en déduisons que $d - d' = v - v' = 0$. Nous obtenons donc l'unicité du couple (d, v) d'endomorphismes commutant tels que d diagonal, v nilpotent et $f = d + v$.

4.a. $d = 2p_1 + 3p_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -6 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. Puisque $v = f - d$, nous avons $v = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4.b. En calculant les puissances de v , on se rend compte que $v^2 = 0$ donc l'indice de nilpotence de v est 2.

Partie 5: Application au calcul de l'exponentielle de matrice

1. Puisque les endomorphismes d et v commutent, nous pouvons appliquer la formule du binôme de Newton. Nous en déduisons alors que $\forall l \in \mathbb{N}$, $f^l = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} d^k \circ v^{l-k}$.

2. Nous avons donc $\exp(d) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i}{i!}$ et $\exp(v) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j}{j!}$. Alors, en utilisant le produit de Cauchy, nous obtenons: $\exp(d) \circ \exp(v) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i}{i!} \right) \circ \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j}{j!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^n \frac{d^k}{k!} \circ \frac{v^{n-k}}{(n-k)!}$ (produit de Cauchy). Il s'ensuit que $w_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d^k v^{n-k} = \frac{(d+v)^n}{n!}$ et ainsi $\exp(d) \circ \exp(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(d+v)^n}{n!} = \exp(d+v) = \exp(f)$.

3. Remarquons déjà que, puisque $d = \sum_{j=1}^p \lambda_j p_j$, alors pour tout entier i , $d^i = \sum_{j=1}^p \lambda_j^i p_j$. Ainsi, $\exp(d) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^p \frac{\lambda_j^i}{i!} p_j \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^i}{i!} \right) p_j = \sum_{j=1}^p e^{\lambda_j} p_j$.

4.a. $\exp(d) = e^{\lambda_1} p_1 + e^{\lambda_2} p_2 = e^2 \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -3 & -3 & 6 \\ -3 & -4 & 7 \end{pmatrix} + e^3 \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 6e^2 - 6e^3 \\ -3e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & 6e^2 - 6e^3 \\ -3e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 7e^2 - 6e^3 \end{pmatrix}$.

Pour calculer $\exp(v)$, nous retournons à la définition: $\exp(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k}{k!} = I_3 + v$ car $v^2 = 0$. Ainsi:

$$\exp(v) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4.b. Enfin, pour calculer $\exp(h)$, nous utilisons la formule de la question 2. Ainsi: $\exp(h) = \exp(d)\exp(v)$ donc:

$$\exp(h) = \begin{pmatrix} -2e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 6e^2 - 6e^3 \\ -3e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & 6e^2 - 6e^3 \\ -3e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 7e^2 - 6e^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 10e^2 - 6e^3 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & 9e^2 - 6e^3 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 11e^2 - 6e^3 \end{pmatrix}.$$