

Problème de modélisation d'extinction d'un patronyme

Ce problème s'intéresse aux descendants d'un individu, que l'on nomme Eve. On appelle descendants de première génération d'un individu de la population l'ensemble de ses enfants, les descendants de seconde génération ses petits-enfants; ... ses descendants de p -ième génération les enfants issus des descendants de $(p-1)$ -ième génération. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On fait l'hypothèse que le nombre de descendants de tout individu d'une génération quelconque est une variable aléatoire suivant la même loi que X et que toutes ces variables sont indépendantes. Nous noterons: $P(X = k) = p_k$ la probabilité pour qu'un individu quelconque de la population X ait exactement k descendants de première génération (i.e. k enfants) et $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ la fonction génératrice de X où $x \in [-1; 1]$. Nous désignons par X_k la variable aléatoire dénombrant le nombre de descendants de k -ième génération d'Eve. Ainsi, $P(X_1 = k)$ est la probabilité qu'Eve ait k enfants. Nous désignons par $U_n = P(X_n = 0)$ la probabilité qu'Eve n'ait aucun descendant à la n -ième génération. On pose par convention $U_0 = 1$. Enfin, pour tout réel x , on définit f par $f(x) = e^{\lambda(x-1)}$. Rappelons que si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors pour tout entier naturel k , alors $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Préliminaires

Dans cette partie, nous étudions le lien entre la loi binomiale et celle de Poisson. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *loi binomiale de paramètres n et p* la loi de probabilité qui correspond à l'expérience suivante:

On renouvelle n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p (la probabilité du succès). On compte le nombre de succès obtenus à l'issue des n épreuves et on désigne par B la variable aléatoire correspondant à ce nombre de succès.

1. Calculer $P(B = k)$ pour $k \in [0, n] \cap \mathbb{N}$.
2. Calculer l'espérance de B .
3. Calculer la variance de B .
4. Dans cette question, nous allons montrer que quand $n \rightarrow +\infty$ et $p \rightarrow 0$ simultanément, de telle sorte que $np \rightarrow \lambda$, alors loi binomiale converge vers une loi de Poisson de paramètre λ . Fixons k et considérons que $n \rightarrow +\infty$ et np tend, quand $n \rightarrow +\infty$, vers une limite finie λ .
 - a. Montrer que $\ln((1-p)^{n-k}) \approx (n-k)(-p)$ quand $p \rightarrow 0$.
En déduire que $\ln((1-p)^{n-k}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\lambda \frac{\lambda^k}{k!}$.
 - b. En déduire que $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
5. Calculer l'espérance de X , variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ .
6. Calculer la variance de X .

Partie 1.

1. Que représente la limite de U_n lorsque $n \rightarrow +\infty$, si elle existe ?
2. On cherche ici à calculer U_2 la probabilité qu'Eve n'ait aucun petit enfant.
 - a. On pose $A_{i,1}$ la variable aléatoire égale au nombre d'enfants du i -ième enfant d'Eve.
Montrer que $P(X_2 = 0 | X_1 = k) = e^{-\lambda k}$.
 - b. En déduire que $U_2 = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $U_n = f(U_{n-1})$.
4. L'objet de cette question est d'étudier la suite (U_n) .
 - a. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
 - b. En distinguant les cas $\lambda \leq 1$ et $\lambda > 1$, dresser le tableau de la fonction $F : x \mapsto F(x) = f(x) - x$, pour tout $x \in [0; 1]$. En déduire, en fonction de $\lambda > 0$, le nombre de racines de F sur $[0; 1]$. Montrer que (U_n) converge vers une limite, que l'on note $\ell(\lambda)$.

5. On suppose maintenant que $\lambda > 1$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que s'il existe un entier naturel n tel que $F(u_n + \varepsilon) < 0$, alors $U_n < \ell(\lambda) < U_n + \varepsilon$.
6. Dans cette question, on se propose de retrouver la relation $U_n = f(U_{n-1})$ en utilisant la notion de fonction génératrice. On pourra utiliser le théorème de Fubini-Tonelli:

Théorème 1 (Théorème de Fubini-Tonelli discret)

$(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de complexes indexée par $\mathbb{N}^2$. Nous avons les équivalences suivantes:

- La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable
- Pour tout entier m , la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{m,n}|$ converge (i.e. la série $\sum_n u_{m,n}$ est absolument convergente) et, $\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{m,n}|$ est finie.
- Pour tout entier n , la série $\sum_{m \in \mathbb{N}} |u_{m,n}|$ est finie et, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |u_{m,n}|$ est finie.

En outre, si l'une de ces assertions est vérifiée, alors:

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{m,n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} u_{m,n} \right).$$

- a. Montrer que la fonction génératrice G de X vérifie, pour $x \in [0; 1]$, $G(x) = f(x) = e^{\lambda(x-1)}$. En déduire l'expression de la fonction génératrice G_1 de X_1 .
- b. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètre λ . Montrer que $G_{X+Y}(x) = G_X(x) \times G_Y(y)$ où G_{X+Y} , G_X et G_Y sont respectivement les fonctions génératrices de $X + Y$, X et Y .
- c. En écrivant $X_2 = \sum_{i=1}^{X_1} A_{i,1}$ où $A_{i,1}$ est le nombre d'enfants du i -ième enfant d'Eve, montrer que la fonction génératrice G_2 de X_2 vérifie la relation $\forall x \in [-1; 1]$, $G_2(x) = G \circ G(x)$.
- d. En déduire la fonction génératrice G_n de X_n en fonction de G .
- e. Calculer U_n en fonction de $G(0)$ et retrouver le résultat de 3.

Partie 2

L'objet de cette partie est d'étudier le phénomène d'extinction de la descendance en fonction de λ .

1. On suppose $\lambda \leq 1$. Rappeler ce que modélise $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n)$.
2. Que peut-on dire de l'extinction de la descendance d'Eve?
3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de générations de descendants d'un individu.
- a. Calculer $P(Z \geq n)$ et $P(Z = n)$ en fonction de U_n et U_{n+1} .
- b. Donner une relation liant $\sum_{k=0}^n kP(Z = k)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n (1 - U_k)$.
4. On suppose dans cette question que $\lambda \in [0; 1[$.
- a. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq f(1) - f(U_n) \leq \lambda(1 - U_n)$.
En déduire $0 \leq 1 - U_n \leq \lambda^n$.
- b. Montrer que S_n converge et montrer comment choisir n pour que S_n soit une valeur approchée à ε près de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - U_k)$.
- c. Montrer que $E(Z)$ existe et l'exprimer en fonction de S .
5. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.
- a. Soit (x_n) une suite réelle et $\overline{x_n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Montrer que si $x_n \rightarrow 0$, alors $\overline{x_n} \rightarrow 0$.
En déduire que si $x_n \rightarrow l$, alors $\overline{x_n} \rightarrow l$.
- b. On pose $V_n = 1 - U_n$ et $W_n = \frac{1}{V_n}$.
Montrer que la suite $(W_{n+1} - W_n)$ converge et calculer sa limite.
- c. Vérifier que $\frac{W_n - W_0}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (W_{k+1} - W_k)$ et en déduire un équivalent simple de $(1 - U_n)$.
- d. Que peut-on dire de la moyenne des générations de descendants d'Eve?