

Problème de modélisation d'extinction d'un patronyme

Préliminaires

1. Fixons $k \in \{0; \dots; n\}$. Alors $P(B = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
2. $E(B) = \sum_{k=0}^n k P(B = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Considérons alors la fonction $f(x) = (1-p+x)^n$. C'est une fonction polynomiale, donc elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; ainsi, en dérivant, nous obtenons: $f'(x) = n(x + (1-p))^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} (1-p)^{n-1}$. Ainsi, $f'(p) = \frac{1}{p} E(B) = n$ d'où $E(B) = np$.
3. Calculons la variance de B . Alors reprenons la fonction f précédente:
 $f''(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^{k-2} (1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-2} (1-p)^{n-k}$. Ainsi, nous en déduisons $f''(p) = \frac{E(B^2) - E(B)^2}{p^2}$. Or, le calcul direct donne $f''(p) = n(n-1)$ d'où nous obtenons:
 $E(X^2) = p^2 n(n-1) + pn$; donc $Var(B) = E(B^2) - E(B)^2 = np(1-p)$.
- 4.a. Quand $p \rightarrow 0$, on a $\ln((1-p)^{n-k}) = (n-k)(-p + o(p)) \approx (n-k)(-p) = \frac{-\lambda(n-k)}{n} \rightarrow -\lambda$ (car nous avons la relation $pn \rightarrow \lambda$). Ainsi, en composant par l'exponentielle, nous en déduisons que $(1+p)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda}$ quand $n \rightarrow +\infty$.
- 4.b. $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(1-1/n) \cdots (1-\frac{k-1}{n})}{k!} n^k p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^n}{k!} e^{-\lambda}$.
5. $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Or, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ est une fonction dérivable et de dérivée $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!}$. En prenant $x = \lambda$, nous en déduisons que $E(X) = \lambda e^\lambda e^{-\lambda} = \lambda$.
6. Nous reconsidérons la fonction $x \mapsto e^x$. En dérivant deux fois, nous obtenons: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{x^{k-2}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{x^{k-2}}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^{k-2}}{k!}$. Ainsi, en évaluant ces fonctions en $x = p$, nous avons: $e^p = \frac{E(X^2)e^\lambda}{p^2} - \frac{E(X)e^\lambda}{p^2}$ d'où $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ et finalement $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$.

Partie 1.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ représente la probabilité que la descendance d'Eve s'éteigne avec le temps.
- 2.a. Soit $A_{i,1}$ la variable aléatoire égale au nombre d'enfants du i -ième enfant d'Eve. Alors $A_{i,1} = 0$ est l'évènement *le i -ème enfant d'Eve n'a pas d'enfants*. Ainsi,

$$P(X_2 = 0 | X_1 = k) = P\left(\sum_{i=1}^k A_{i,1} = 0\right) = P(A_{1,1} = 0 \cap \dots \cap A_{k,1} = 0).$$

Comme $A_{i,1}$ et X sont de même loi, nous en déduisons que $P(A_{i,1} = 0) = P(X = 0) = e^{-\lambda}$, et comme les variables aléatoires $(A_{i,1})_i$ sont deux à deux indépendantes, il s'ensuit que $P(A_{1,1} = 0 \cap \dots \cap A_{k,1} = 0) = \prod_{i=1}^k P(A_{i,1} = 0) = \prod_{i=1}^k e^{-\lambda} = e^{-\lambda k}$.

2.b. La probabilité qu'Eve n'ait pas de petits enfants est $U_2 = P(X_2 = 0)$. Posons $X_1 = k$ l'évènement *Eve a exactement k enfants*, alors par la formule des probabilités totales, nous avons:

$$P(X_2 = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_2 = 0 | X_1 = k) P(X_1 = k).$$

Ainsi, en utilisant 2.a. nous avons:

$$P(X_2 = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-\lambda})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\lambda}} = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)}.$$

3. Soit n un entier naturel non nul. Alors on considère le système complet d'évènements $(X_1 = k)_{k \in \mathbb{N}}$. Ainsi, il s'ensuit que:

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = 0 | X_1 = k) P(X_1 = k).$$

Or, $P(X_n = 0 | X_1 = k)$ signifie que les k enfants d'Eve n'ont pas de descendance de $(n-1)$ -ième génération (à partir d'eux). Or, puisque les individus ont tous les mêmes caractéristiques, nous en déduisons que la probabilité de tout individu de ne pas avoir de descendance à la $(n-1)$ -ième génération est égale à U_{n-1} . Ainsi, nous avons:

$$P(X_n = 0 | X_1 = k) = P(A_{1;n-1} = 0 \cap \dots \cap A_{k;n-1} = 0) = \prod_{i=1}^k P(A_{i;n-1} = 0) = U_{n-1}^k.$$

Nous déduisons alors de la formule des probabilités totales:

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{n-1}^k P(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{n-1}^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(U_{n-1} \lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{U_{n-1} \lambda} = e^{\lambda(U_{n-1}-1)}.$$

Nous obtenons alors bien $U_n = f(U_{n-1})$.

4.a. Nous étudions la fonction $f(x) = e^{\lambda(x-1)}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$. Nous déduisons alors que $f'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit alors que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4.b. La fonction F est bien définie sur $[0; 1]$ et est $\mathcal{C}^\infty$. Aussi avons-nous: $F'(x) = f'(x) - 1 = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$. Aussi, $F'(x)$ s'annule si et seulement si $\lambda e^{\lambda(x-1)} - 1 = 0$, c'est-à-dire pour $x = 1 - \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$.

Si $\lambda \leq 1$, nous constatons que cette valeur ne se trouve pas dans l'intervalle $[0; 1]$. La fonction F' est alors toujours négative sur $[0; 1]$ et la fonction F est donc strictement décroissante sur cet intervalle.

Si $\lambda > 1$, alors la valeur d'annulation de F' se trouve dans l'intervalle $[0; 1]$. Ainsi, la fonction F est-elle décroissante sur $[0; 1 - \ln(\lambda)/\lambda]$ et croissante (strictement) sur $[1 - \ln(\lambda)/\lambda; 1]$.

Or, $F(1 - \ln(\lambda)/\lambda) = \frac{\ln(\lambda)+1}{\lambda} - 1$. Si $\lambda = 1$ alors $F(0) = 0$ donc par décroissance de cette fonction en λ , nous en déduisons que $F(1 - \ln(\lambda)/\lambda) < 0$. Ainsi, nous pouvons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (la fonction F étant continue). Nous en déduisons que F s'annule en $\ell(\lambda)$ sur $[0; 1 - \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}]$. Enfin, la suite (U_n) converge vers le point fixe $\ell(\lambda)$ de la fonction f (la suite (U_n) étant croissante et majorée par ce point fixe).

5. Si $F(U_n + \varepsilon) < 0$ alors par les variations de la fonction F , nous en déduisons que $U_n + \varepsilon > \ell(\lambda)$. Comme de plus la suite (U_n) est croissante et de limite $\ell(\lambda)$, nous en déduisons que $U_n < \ell(t) < U_n + \varepsilon$.

6.a. Soit G la fonction génératrice de X , alors $G(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} x^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)} = f(x)$. Nous avons donc $G_1(x) = f(x)$.

6.b. Pour $x \in [0; 1]$, nous avons: $G_{X+Y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X+Y = n)x^n$. Or, $P(X+Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k \cap Y = n-k) = \sum_{k=0}^n P(X = k) \times P(Y = n-k)$ car les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Nous obtenons ainsi: $P(X+Y = n) = \sum_{k=0}^n \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \times \left(e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \right) = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!}$ (par la formule du binôme de Newton). Ainsi, en injectant cette égalité dans l'expression de la fonction génératrice G_{X+Y} , nous en déduisons:

$G_{X+Y}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!} x^n = e^{-2\lambda} e^{2\lambda x} = e^{2\lambda(x-1)}$. D'autre part, nous avons $G_X(x) \times G_Y(x) = e^{\lambda(x-1)} \times e^{\lambda(x-1)} = e^{2\lambda(x-1)}$ d'où nous déduisons l'égalité $G_{X+Y}(x) = G_X(x) \cdot G_Y(x)$.

6.c. Rappelons que X_1 est la variable aléatoire décrivant le nombre d'enfant d'Eve. Ainsi, nous en déduisons que $P(X_2 = k) = P(\sum_{i=1}^{X_1} A_{i,1} = k)$. Or, comme $\{X_1 = n; n \in \mathbb{N}^*\}$ forme un système complet d'évènements, nous en déduisons par la formule des probabilités totales que:

$$P(X_2 = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\sum_{i=1}^{X_1} A_{i,1} = k | X_1 = n) \cdot P(X_1 = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\sum_{i=1}^n A_{i,1} = k) \cdot P(X_1 = n).$$

A présent, considérons la fonction génératrice G_2 et X_2 . Nous avons alors:

$G_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_2 = k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P(\sum_{i=1}^n A_{i,1} = k) \cdot P(X_1 = n)x^k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(\sum_{i=1}^n A_{i,1} = k) \cdot P(X_1 = n)x^k = \sum_{n=1}^{\infty} G_{A_{1,1}+A_{2,1}+\dots+A_{n,1}}(x)$. Or, les $A_{i,1}$ sont des v.a. indépendantes suivant toutes la loi de Poisson. Aussi, $G_{A_{1,1}+A_{2,1}+\dots+A_{n,1}}(x) = \prod_{i=1}^n G_{A_{i,1}}(x) = (G_{A_{i,1}}(x))^n$. Par suite, nous avons: $G_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 = n)G(x)^n = G(G(x)) = G \circ G(x)$.

Note: On utilise une interversion des signes $\sum$. Bien que hors programme, on donne les théorèmes et justifications:

Théorème 1 (Théorème de Fubini-Tonelli (cas discret))

Soit $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs indexée par $\mathbb{N}^2$. Alors, nous avons les équivalences suivantes:

- La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable
- Pour tout entier m , la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{m,n}$ converge et, en posant $s_m = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_{m,n}$ la série $\sum s_m$ converge.
- Pour tout entier n , la série $\sum_{m \in \mathbb{N}} u_{m,n}$ converge et, en posant $\sigma_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} u_{m,n}$ la série $\sum \sigma_n$ converge.

En outre, si l'une de ces assertions équivalentes est vérifiée, alors

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{m,n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} u_{m,n} \right).$$

Dans le cas complexe, nous avons le théorème de Fibini-Tonelli discret:

Théorème 2 (Théorème de Fubini-Tonelli discret)

$(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de complexes indexée par $\mathbb{N}^2$. Nous avons les équivalences suivantes:

- La famille $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable
- Pour tout entier m , la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{m,n}|$ converge (i.e. la série $\sum_n u_{m,n}$ est absolument convergente) et, $\sum_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{m,n}|$ est finie.
- Pour tout entier n , la série $\sum_{m \in \mathbb{N}} |u_{m,n}|$ est finie et, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |u_{m,n}|$ est finie.

En outre, si l'une de ces assertions équivalentes est vérifiée, alors

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{m,n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} u_{m,n} \right).$$

Dans le cadre de notre exercice, si $x \in]-1; 1[$, alors $\sum_{k=0}^{\infty} |P(\sum_{i=1}^n A_{i,1} = k)P(X_1 = n)x^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x|^k = \frac{1}{1-|x|}$ qui est bien définie (*Note: il serait plus propre de faire déjà cette somme de $k = 0$ à k puis de constater que la suite des sommes partielles (en N) converge*). Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, nous en déduisons que la première série converge. A présent, $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |P(\sum_{i=1}^n A_{i,1} = k)P(X_1 = n)x^k| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 = k)|x^k| \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 = k) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 = k) \frac{1}{1-|x|} = \frac{1}{1-|x|}$ puisque $\{X_1 = k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'évènements, donc $\sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k) = 1$.

6.d. Par récurrence, nous en déduisons (facilement) que $G_n(x) = G \circ G \circ \dots \circ G = G^n$.

6.e. $G_n(0) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k)x^k$ donc $G_n(0) = P(X_n = 0) = U_n$. Il s'ensuit donc que $U_n = G_n(0) = G \circ G_{n-1}(0) = f(U_{n-1})$.

Partie 2

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ existe, cela représente la probabilité d'extinction de la descendance d'Eve.

2. Si $\lambda \geq 1$, alors $U_n \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui signifie que l'extinction de la descendance d'Eve est certaine dans le temps.

3.a. $P(Z \geq n) = P(X_n > 0) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - U_n$. $P(Z = n) = P(X_n > 0) - P(X_{n+1} > 0) = (1 - U_n) - (1 - U_{n+1}) = U_{n+1} - U_n$.

3.b. $\sum_{k=0}^n kP(Z = k) = \sum_{k=0}^n k(U_{k+1} - U_k) = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)U_k - \sum_{k=0}^n kU_k = nU_{n+1} + \sum_{k=1}^n U_k = n(U_{n+1} - 1) + S_n$.

4.a. Si $\lambda < 1$, nous savons que l'unique point pour lequel F s'annule est le point $\ell = 1$. Soient $M = \max_{[U_n; 1]} f'(x)$ et $m = \min_{[U_n; 1]} f'(x)$. Alors, par l'inégalité des accroissements finis sur $[U_n; 1]$, nous avons: $0 \leq m(1 - U_n) \leq f(1) - f(U_n) \leq M(1 - U_n)$. Or, $M = \lambda$, $f(1) = 1$ et $U_n = f(U_{n-1})$ donc $0 \leq f(1) - f(U_n) \leq \lambda(1 - U_n)$. En réitérant ce raisonnement, nous obtenons: $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - U_{n+1} \leq (1 - U_0)\lambda^{n+1} = \lambda^{n+1}$.

4.b. $S_n = \sum_{k=1}^n (1 - U_k)$. Or, d'après 4.a. $(1 - U_k) \leq \lambda^k$ donc par théorème de comparaison entre les séries à termes strictement positives, nous obtenons la convergence de la suite S_n vers S . Nous obtenons la majoration $0 \leq S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 - U_k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^k = \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$.

Il suffit alors de choisir $n \geq \ln((1-\lambda)\varepsilon)/\ln(\lambda) + 1$.

4.c. $E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(Z = k) = S_n + n(U_{n+1} - 1)$ (par 3.b). Ainsi, en utilisant l'encadrement $0 \leq n(1 - U_{n+1}) \leq n\lambda^{n+1}$, nous en déduisons $n(U_{n+1} - 1) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et donc la limite $E(Z)$ existe quand $n \rightarrow +\infty$ et est égale à S .

5.a. Il s'agit ici de démontrer le lemme de Césaro:

Si $x_n \rightarrow 0$, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|x_n| \leq \varepsilon$. Ainsi, $\forall n \geq N$, nous avons:

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n x_i \right| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N x_i \right| + \frac{1}{n} \left| \sum_{k=N+1}^n x_i \right| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N x_i \right| + \frac{n-N+1}{n} \varepsilon$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, nous avons $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N x_i \right| \rightarrow 0$ car le numérateur est une constante. Pour le second membre, nous avons: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-N+1}{n} = 1$. Ainsi, il existe $M \geq 0$ tels que $\forall n \geq M$, $|\frac{n-N+1}{n} - 1| \leq 1$ et $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N x_i \right| \leq \varepsilon$. Ainsi, $\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n x_i \right| \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$, et comme cette relation est valable pour tout $\varepsilon > 0$, nous en déduisons $\overline{x_n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Si $x_n \rightarrow l$, alors la suite $u_n = x_n - l$ est une suite tendant vers 0. Ainsi en appliquant le précédent résultat à cette suite, nous obtenons: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{u_n} = 0$. Or, $\overline{u_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - l) = \frac{1}{n} (\sum_{k=1}^n x_k) - l$. Finalement, nous obtenons bien $\overline{x_k} \rightarrow l$ quand $n \rightarrow +\infty$.

5.b. Nous sommes ici dans le cas $\lambda = 1$. Alors $U_n \rightarrow 1$, soit encore $V_n \rightarrow 0$. Calculons:

$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{V_{n+1}} - \frac{1}{V_n} = \frac{1}{1-U_{n+1}} - \frac{1}{1-U_n}$. Or, $U_{n+1} = f(U_n) = e^{\lambda(U_n-1)} = e^{-\lambda U_n}$ ($\lambda = 1$), donc:

$$W_{n+1} - W_n = \frac{1}{1 - e^{(U_n-1)}} - \frac{1}{1 - U_n} = \frac{V_n - 1 + e^{-V_n}}{V_n(1 - e^{-V_n})}.$$

Comme $V_n \rightarrow 0$, nous avons par développement limité en 0: $e^{-V_n} = 1 - V_n + \frac{1}{2}V_n^2 + V_n^2\varepsilon(V_n)$. Ainsi:

$$W_{n+1} - W_n = \frac{V_n - 1 + 1 - V_n + \frac{1}{2}V_n^2 + o(V_n^2)}{V_n(V_n - \frac{1}{2}V_n^2 - o(V_n^2))} = \frac{1/2 + o(V_n)}{1 - 1/2V_n - o(V_n)} \rightarrow 1/2.$$

Ainsi, nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_{n+1} - W_n = 1/2$.

5.c. $\frac{W_n - W_0}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} W_{k+1} - W_k$. Appliquons alors le théorème de Convergence de Césaro à $x_k = W_{k+1} - W_k$, nous en déduisons: $\overline{x_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (W_{k+1} - W_k) \rightarrow 1/2$, c'est-à-dire $\frac{W_n - W_0}{n} \rightarrow 1/2$. Comme $W_0/n \rightarrow 0$ et $W_n/n \rightarrow 1/2$ nous en déduisons W_n est équivalent à $\frac{n}{2}$ quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, comme $1 - U_n = \frac{1}{W_n}$, on a: $1 - U_n$ est équivalent $2/n$.

5.d. $\sum_{k=0}^n kP(Z = k) = \sum_{k=1}^n (1 - U_k) + n(U_{n+1} - 1)$.

Comme $1 - U_n \approx \frac{2}{n}$, par la règle de comparaison des séries à termes positifs, nous en déduisons que $\sum_{k=1}^n (1 - U_k)$ diverge vers $+\infty$.

De plus $n(U_{n+1} - 1) \approx -n\frac{2}{n+1} \approx -2$. Ainsi, $\sum_{k=0}^n kP(Z = k) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ et donc $E(Z)$ n'existe pas.