

Techniques avec les $\cos(n\theta)$

Niveau avancé

Exercice: Valeurs d'adhérences de la suite $(\cos(n))$

Partie I: Sous-groupes additifs de $(\mathbb{Z}, +)$

1. H étant non réduit à $\{0\}$, il existe un élément h non nul dans H . Quitte à considérer $-h$, on peut supposer que $h > 0$. Ainsi, $H \cap \mathbb{N}^*$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle admet un plus petit élément. Soit n celui-ci.
2. Procédons par double inclusion. Par la question précédente, nous savons que $n \in H$. Ainsi, puisque H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, est stable par la somme et par passage à l'opposé, d'où $\forall k \in \mathbb{Z}, kn \in H$. Il s'ensuit que $n\mathbb{Z} \subset H$.
Réciproquement, soit $h \in H$. Sans perte de généralité (quitte à considérer $-h$ à la place de h), on suppose que $h > 0$. Ainsi, $h \in H \cap \mathbb{N}^*$. Comme $\mathbb{N}$ est archimédien, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $h \in [kn; (k+1)n[$, ou encore $kn \leq h < (k+1)n$. Il s'ensuit (en soustrayant kn à tous les termes) que $0 \leq h - kn < n$. Or, $h \in H$ et $kn \in H$ (puisque $n \in H$), d'où puisque H est un sous-groupe additif de $(\mathbb{Z}, +)$, $h - kn \in H$. La minimalité de n (plus petit élément de $H \cap \mathbb{N}^*$) implique alors que $h - kn = 0$, soit $h = kn$. Ainsi, $h \in \mathbb{Z}$ (donc aussi $-h \in n\mathbb{Z}$) et donc $H \subset n\mathbb{Z}$.
Nous avons donc bien démontré, par double inclusion, que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) **• Non vide:** Puisque H_1 et H_2 sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$, il contiennent tout deux l'élément neutre de $(\mathbb{Z}, +)$, soit 0. Ainsi, $0 \in H_1, 0 \in H_2$ d'où $0 \in H_1 \cap H_2$.
• Stabilité par addition Soient $h \in H_1 \cap H_2$ et $h' \in H_1 \cap H_2$. Montrons que $h + h' \in H_1 \cap H_2$. Remarquons que $h \in H_1 \cap H_2 \subset H_1$ et $h' \in H_1 \cap H_2 \subset H_1$. Or, H_1 étant un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, il est stable par addition, d'où $h + h' \in H_1$. On procède de même pour montrer que $h + h' \in H_2$ et donc $h + h' \in H_1 \cap H_2$.
• Stabilité par passage à l'opposé Soit $h \in H_1 \cap H_2$. Montrons que $-h \in H_1 \cap H_2$. Comme $h \in H_1$ et H_1 sous-groupe, il est stable par passage à l'opposé, d'où $-h \in H_1$. De même on montre que $-h \in H_2$ d'où $-h \in H_1 \cap H_2$.
Il s'ensuit donc que $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
(b) **• Non vide** Puisque H_1 et H_2 sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$, ils contiennent tous deux l'élément neutre 0 d'où $0 + 0 \in H_1 + H_2$, qui est donc non vide.
• Stabilité par addition Soient $h_1 + h_2 \in H_1 + H_2$ et $h'_1 + h'_2 \in H_1 + H_2$. Alors $(h_1 + h_2) + (h'_1 + h'_2) = \underbrace{(h_1 + h'_1)}_{\in H_1} + \underbrace{(h_2 + h'_2)}_{\in H_2} \in H_1 + H_2$.
• Stabilité par passage à l'opposé Soit $h_1 + h_2 \in H_1 + H_2$. Comme $h_1 \in H_1$ et H_1 sous-groupe, il est stable par passage à l'opposé et donc $-h_1 \in H_1$. On montre de même que $-h_2 \in H_2$ d'où $(-h_1) + (-h_2) \in H_1 + H_2$, soit $-(h_1 + h_2) \in H_1 + H_2$.
Ainsi, $H_1 + H_2$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
(c) Enfin, nous savons que $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ et d'après la question 2., ils sont de la forme $k\mathbb{Z}$.
On remarque que $n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de n . Ainsi les éléments de $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}$ sont-ils les multiples communs de n et de m , donc du $\text{ppcm}(n, m)$. On montre alors l'égalité aisément.
Posons $d = \text{pgcd}(n, m)$. Ainsi, il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n = kd$ et $m = k'd$ d'où $n \in d\mathbb{Z}$ et $m \in d\mathbb{Z}$. Il s'ensuit alors l'inclusion $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z}$.
Réciproquement montrons que $d \in n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$. D'après le théorème de Bezout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $un + vm = d$, d'où $d \in n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$. Il s'ensuit donc que $d\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$. On en déduit alors par double inclusion que $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} = \text{pgcd}(n, m)\mathbb{Z}$.

Partie II: Sous-groupes additifs de $(\mathbb{R}, +)$

1. (a) **Méthode:** Il faut ici montrer que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ pour en déduire l'existence d'une borne inférieure.
 H étant non réduit à 0, il existe $a \neq 0$, $a \in H$. Comme H est un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$, alors $-a \in H$. Ainsi, sans perte de généralité, on peut considérer que $h > 0$, d'où $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Comme elle est aussi minorée (par 0), on en déduit que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure α .
- (b) Supposons donc $\alpha > 0$ et montrons que $H = \alpha\mathbb{Z}$ par double inclusion. Pour ce faire, débutons par montrer que $\alpha \in H$. $\alpha \in H \cap \mathbb{R}_+^*$ donc α est le plus petit élément de $H \cap \mathbb{R}_+^*$. Comme H est un sous-groupe additif, il s'ensuit que $\alpha\mathbb{Z} \subset H$. Montrons l'inclusion inverse: soit donc $h \in H$, avec (sans perte de généralité $h > 0$). Considérons le plus grand $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\alpha \leq h < (k+1)\alpha$. Alors $0 \leq h - k\alpha < \alpha$. Or, $h - k\alpha \in H$ d'où par définition de α , il s'ensuit que $h - k\alpha = 0$. On en déduit alors que $h = k\alpha$ et donc $H \subset \alpha\mathbb{Z}$.
- (c) Soit donc $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soient $x < y$ deux éléments de $\mathcal{O}$ tels que $[x, y] \subset \mathcal{O}$. Alors comme $0 < y - x$, il existe $h \in H$ tel que $0 < h < y - x$.
 Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \times h \leq y < (k+1)h$. Alors nous avons $x \leq kh \leq y$: en effet sinon nous aurions $kh \leq x < (k+1)h$ et par différence nous aurions $-h < y - x < h$, ce qui contredit la définition de h . Ainsi, $h \in [x, y]$ et donc $\mathcal{O} \cap K \neq \emptyset$.
2. La question précédente induit une dichotomie: soit $\alpha > 0$ et alors $H = \alpha\mathbb{Z}$, soit $\alpha = 0$ et alors H est dense dans $\mathbb{Z}$. Il est clair que si H est discret, il ne peut être dense dans $\mathbb{R}$ d'où H est discret si et seulement si $H = \alpha\mathbb{Z}$, avec $\alpha > 0$.
3. Remarquons que $G = \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$, donc il est soit discret, soit dense dans $\mathbb{R}$.
 Supposons que G soit discret: ainsi, il existe $\gamma > 0$ tel que $G = \gamma\mathbb{Z}$, ou encore $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \gamma\mathbb{Z}$. Aussi, α et β sont deux multiples de γ : il existe donc $u, v \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\alpha = u\gamma$ et $\beta = v\gamma$. Ainsi, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{u}{v} \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, si $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{u}{v}$ avec $(u, v) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ et $u \wedge v = 1$, alors $\alpha v = \beta u$. $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \beta \left(\frac{u}{v}\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \right) = \frac{\beta}{v} (u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z})$. Or, comme $u \wedge v = 1$, nous en déduisons par le théorème de Bezout que $u\mathbb{Z} + v\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Il s'ensuit donc que $\alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z} = \frac{\beta}{v}\mathbb{Z}$ et donc est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}, +)$.

Partie III: Application: valeurs d'adhérences de $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$

1. Γ est non vide ($1 \in \Gamma$), stable par produit (si $z, z' \in \Gamma$, alors $|z \times z'| = |z| \times |z'| = 1$) et stable par passage à l'opposé (car si $|z| = 1$, alors $|\frac{1}{z}| = 1$). Il s'ensuit que Γ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Soient $(x, x') \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(x + x') = e^{i(x+x')} = e^{ix} \times e^{ix'} = f(x) \times f(x')$. Ainsi, f est un morphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
 Enfin, comme tout complexe $z \in \Gamma$ est de module 1, il s'écrit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ d'où $z \in f(\theta)$. Il s'ensuit donc que f est un morphisme surjectif de groupe.
Note: $\text{Ker}(f) = 2\pi\mathbb{Z}$ et donc par le théorème de factorisation nous avons l'isomorphisme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \sim \Gamma$.
3. Remarquons que l'on doit considérer $n \bmod 2\pi$. Ainsi, on s'intéresse au groupe $H = 2\pi\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ et avons $\{e^{in}, n \in \mathbb{Z}\} = \{f(h), h \in H\} = f(H)$. Or, d'après la question précédente, le sous-groupe H est dense dans $(\mathbb{R}, +)$. Ainsi, par continuité et surjectivité de la fonction f , nous en déduisons que $f(H)$ est dense dans $(\Gamma, \times)$.
4. En considérant la partie réelle des complexes $\{e^{in}, n \in \mathbb{Z}\}$, nous déduisons de la densité de ces complexes dans Γ que l'ensemble $\{\cos(n), n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$. Par parité de $\cos$ il s'ensuit que $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$, c'est-à-dire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.