

Solution: Techniques avec les $\cos(n\theta)$

Niveau basique

Exercice 1: Suite cosinus d'entiers

1. Nous avons la formule $\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$. Aussi, il s'ensuit que

$$\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2 \sin(n) \cos(1) \quad \text{soit} \quad v_{n+1} + v_{n-1} = 2v_n \cos(1)$$

Ainsi, en posant $\lambda = 2 \cos(1)$ nous obtenons la formule demandée.

- (a) Supposons la suite (v_n) convergente et de limite ℓ . Alors par passage à la limite dans l'expression précédente, nous obtenons que $\ell + \ell = 2 \cos(1)\ell$, soit $2\ell = 2 \cos(1)\ell$. Il s'ensuit alors que $\ell = 0$. Ainsi, si la suite (v_n) est convergente, alors c'est vers 0.
- (b) Nous avons que $\sin(n+1) = \cos(n) \sin(1) + \sin(n) \cos(1)$, soit $v_{n+1} = u_n \sin(1) + v_n \cos(1)$. Par passage à la limite, nous en déduisons alors que la suite (u_n) est de limite nulle.
- (c) Or, nous avons pour tout entier naturel n que $u_n^2 + v_n^2 = 1$ d'où on ne peut avoir ces deux suites de limites nulles. Il s'ensuit donc que la suite (v_n) n'est pas convergente: elle est donc divergente. La relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 + v_n^2 = 1$, il s'ensuit que la suite (u_n) est aussi divergente.

Exercice 2: Généralisation

Par la formule d'angle moitié, nous avons

$$\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) = 2 \sin(n\theta) \cos(\theta)$$

soit $v_{n+1} + v_{n-1} = 2v_n \cos(\theta)$. Supposons que la suite (v_n) soit convergente et de limite ℓ . Alors par passage à la limite dans la relation précédente, nous avons que $2\ell = 2\ell \cos(\theta)$. Or, comme $\cos(\theta) \neq 0$ cela implique que $\ell = 0$.

Nous avons alors $\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta) \sin(\theta) + \sin(n\theta) \cos(\theta)$, soit $v_{n+1} = u_n \sin(\theta) + v_n \cos(\theta)$. Par passage à la limite, nous obtenons donc que (u_n) serait de limite nulle. Or, pour tout entier naturel n , nous avons $u_n^2 + v_n^2 = 1$ d'où les deux suites (u_n) et (v_n) ne peuvent avoir toutes deux une limite nulle. Il s'ensuit donc que la suite (v_n) est divergente, et de $u_n^2 + v_n^2 = 1$ nous déduisons que la suite (u_n) l'est aussi.

Exercice 3: Somme des $\cos(k\theta)$

1. On utilise l'exponentielle complexe: $C_n + iV_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^n (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$. Or $e^{ik\theta} = (e^{i\theta})^k$ d'où nous reconnaissons la somme des termes d'une suite géométrique. Il s'ensuit que

$$C_n + iV_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

Reste alors à séparer les parties réelles et imaginaires pour obtenir les valeurs de C_n et V_n .

$$C_n + iV_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta/2} e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = e^{in\theta/2} \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Il s'ensuit alors que

$$C_n = \frac{\sin((n+1)\theta/2) \cos(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}; \quad S_n = \frac{\sin((n+1)\theta/2) \sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

2. On procède de même: $U_n + iV_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta})^k$.
 Nous reconnaissons alors par la formule du binôme:

$$U_n + iV_n = (1 + e^{i\theta})^n$$

Or, $1 + e^{i\theta} = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}$. Il s'ensuit alors que

$$U_n + iV_n = (2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2})^n = 2^n \cos^n(\theta/2) e^{in\theta/2}$$

Il s'ensuit alors que

$$U_n = 2^n \cos^n(\theta/2) \cos(n\theta/2) \quad \text{et} \quad V_n = 2^n \cos^n(\theta/2) \sin(n\theta/2)$$

Exercice 4: Equation de degré 2

1. Le discriminant donne $\Delta = 4 \cos^2(\theta) - 4 = -4(1 - \cos^2(\theta)) = -4 \sin^2(\theta) = (2i \sin(\theta))^2$. Ainsi, les racines complexes de ce polynôme sont $z_1 = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$ et $z_2 = \cos(\theta) - i \sin(\theta) = e^{-i\theta}$.
2. Effectuons un changement d'inconnues: posons $Z = z^n$. Alors l'équation souhaitée devient $Z^2 - 2Z \cos(n\theta) + 1 = 0$. D'après la question précédente, les racines de cette équations sont $Z = e^{\pm in\theta}$.
 Il reste alors à résoudre $z^n = e^{\pm in\theta}$ ce qui donne

$$\mathcal{S} = \left\{ e^{i\theta}, e^{i\theta+2\pi/n}, \dots, e^{i\theta+2(n-1)\pi/n} \right\} \cup \left\{ e^{-i\theta}, e^{-i\theta+2\pi/n}, \dots, e^{-i\theta+2(n-1)\pi/n} \right\}$$