

Formule de Taylor-Lagrange et applications.

Sujets.

On rappelle qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée par un réel $K > 0$ si la fonction $|\varphi|$ est majorée par K : $\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq K$. Pour une fonction f à valeurs réelles et p fois dérivables sur un intervalle I quelconque, on note $M_i = \sup_{x \in I} |f^{(i)}(x)|$, pour $i \in \{0, 1, \dots, p\}$.

Partie I: Préliminaires

1. Le but de cette question est de démontrer le théorème de Taylor-Lagrange suivant:

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur le segment $[a; b]$ et de classe $\mathcal{D}^{n+1}$ sur $]a; b[$, alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que:

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

(a) A quoi correspond cette formule pour $n = 0$?

(b) Soit $A \in \mathbb{R}$ quelconque, et soit g la fonction définie par $g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$.

Montrer que l'on peut choisir A tel que $g(a) = g(b)$.

(c) En déduire, pour la valeur de A choisie question 1.(b), l'existence d'un réel $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$.

(d) En déduire que $g'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} (f^{(n+1)}(x) - A)$. Conclure au théorème de Taylor-Lagrange.

2. Soit m un entier supérieur ou égal à 1. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m à l'origine de la fonction $(e^x - 1)^m$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ est un entier entre } 1 \text{ et } m-1 \\ m! & \text{si } j = m \end{cases}$$

3. Prouver que si (u_k) est une suite croissante de réels strictement positifs et k, n des entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$(u_1 u_2 \dots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \dots u_n)^k.$$

Partie II - Cas $n = 2$

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_2 .

(a) En écrivant, pour $h > 0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

(b) En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2M_0 M_2}$.

2. (a) Montrer de même que, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et de classe $\mathcal{C}^3$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3 , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2} (9M_0^2 M_3)^{1/3}.$$

(b) f'' est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$?

Partie III - $n \geq 2$

Soit f une fonction, non constante, de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et de classe $\mathcal{C}^n$ par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_n .

1. En utilisant la question 2.) du préliminaire ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à la fonction f entre les valeurs x et $x+h$ pour $h = 1, 2, \dots, n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est, elle aussi, bornée sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0 \leq k \leq n$. On note alors $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$.

3. (a) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $M_k > 0$.

(b) En utilisant la suite finie $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ avec $u_k = 2^{k-1} \frac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout entier k entre 0 et n , on a :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Est-ce la meilleure majoration possible ?