Exercices de théorie des graphes.

IUT Blagnac, année 2004-2005.

culus@univ-tlse2.fr

Présentation :

Vous trouverez ici le support des travaux dirigés. Tout comme le support de cours, ce poly. d'exercices contient bien plus d'exercices que nous ne pourrons en faire durant les séances de TDs, mais ce surplus nous laissera le choix d'approfondir une notion, de poursuivre plus avant, de reprendre telle type d'exercice ... Il n'est en aucun cas demandé où prévu de faire l'intégralité des exercices, même si se serait souhaitable.

Introduction. Problème d'affectation.
Un nouvel hôpital va prochainement ouvrir ses portes. Le bâtiment est déjà construit, et dispose de 30 zones différentes (notées 1,2,3,...,29,30), représentant donc les emplacements physiques des bâtiments. Chacune de ces zones peut accueillir indistinctement l'un des 30 services de l'hôpital. Les services étant ceux d'un hôpital classique (donc cardiologie, chirurgie, podologie, pédiatrie....), ils seront notés A,B,...,Y,Z,A',B',C',D'. L'administration hospitalière connaît les nombres moyens de transferts de malades entre chaque service (par exemple, en moyenne, par jour, il y a 10 patients passant du service A vers le service B, il y en à 1 par jour entre les services A et C et ainsi de suite ...)..
Le cabinet d'architecte, lui, vous fournit le temps moyen de transfert d'une zone vers toutes les autres zones (par exemple, il faut 50 sec. pour passer de la zone 1 à la zone 2).
Votre travail est de trouver une affection des 30 services de l'hôpital dans les 30 zones des bâtiments de manière optimale, c'est-à-dire de faire en sorte que le cumul des temps de transfert soit minimal.
Vous disposez pour cela d'un ordinateur actuel...
1. Formaliser le problème mathématiquement: qu'est-ce qu'une affectation ?
2. Calculer le nombre d'affectations différentes des 30 services parmi les 30 zones du bâtiment.
3. L'ordinateur dont vous disposez peut effectuer 1 milliard d'opérations à la seconde.
Estimez (grossièrement) le temps mis pour obtenir, par une méthode exhaustive (ie: en essayant toutes les solutions), l'une des meilleures configurations donnant le temps cumulé de transfert minimal.

Problème de l'emploi du temps.
Considérons le problème (apparamment simple) de la création d'un emploi du temps pour les examens de fin d'année d'une certaine école. Cette école propose 60 modules distincts. Deux examens ne peuvent avoir lieu en même temps s'il existe un étudiant inscrit à ces deux modules.
On dispose de 10 crénaux horaires différents, et (pour simplifier) d'un nombre illimité de salles.
Le responsable de la répartition des salles trouvant qu'il a bien trop de travail (avec un nombre infini de salles à gérer) pour réfléchir à ce nouveau problème, décide d'utiliser une méthode exhaustive: il veut programmer son ordinateur personnel afin qu'il lui donne toutes les affectations possibles ne contredisant pas l'interdiction d'avoir 2 examens simultanés dont au moins un étudiant est inscrit au deux.
1. Trouver combien d'opérations doivent être alors faites avant d'épuiser toutes les solutions.
2. Avec un ordinateur effectuant 1 milliard d'opérations par seconde, estimer le temps requis pour la résolution de ce problème.

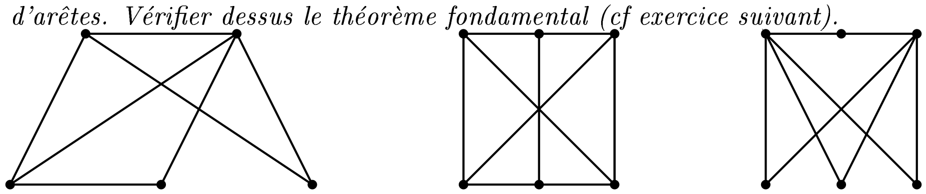
Chapitre 1: Introduction

Vocabulaire:

Si G est un graphe, $V(G)$ désigne l'ensemble de ses sommets et $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes. $|V(G)| = n$ est l'ordre du graphe, alors que l'on note usuellement m pour le nombre d'arêtes de G.
Si x est un sommet, $d(x)$ désigne le degré de ce sommets (nombre d'arêtes ayant x pour extrémité).
Une composante connexe du graphe G est un ensemble de sommets tel qu'il existe une chaîne les reliant deux à deux.

Exercice 1 *(Nombre de graphes à n sommets)*
Soit n un entier. Combien y a-t-il de graphes différents ayant n sommets?

Exercice 2 *(Lecture des premiers paramètres d'un graphe.)*
Pour les 3 graphes suivants, donnez le nombre de sommets, les degrés des sommets, ainsi que le nombres d'arêtes. Vérifier dessus le théorème fondamental (cf exercice suivant).



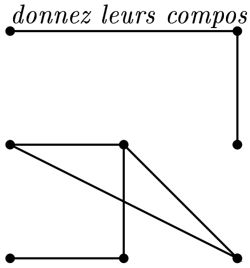
Exercice 3 *(Lien entre arêtes et degré dans un graphe).*
Soit $G = (V(G), E(G))$ *un graphe d'ordre* n*, tel que* $|E(G)| = m$*. Nous noterons* $, x_2, \dots x_n$ *ses sommets.*
1. Démontrez le théorème fondamental suivant: $\sum_{i=1}^{n} d_G(x_i) = 2 * m$.
2. Est-il possible de construire un graphe d'ordre 5 ayant pour suite de degré: (3,3,2,2,2) ?
3. Même question pour le graphe d'ordre 6 ayant pour suite de degrés: (3,3,2,2,2,2) ?
4. Même question avec le graphe d'ordre 7 ayant pour suite de degrés: (5,5,4,4,2,2,1)?
5. Pouvez-vous conjecturer un résultat reliant parité et possibilité pour une telle suite d'entiers d'être ou non suite des degrés d'un graphe?

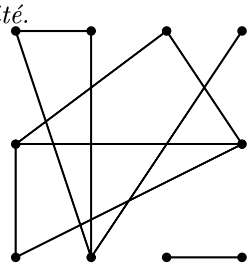
Exercice 4 *(Lien entre degré et existence d'un graphe*)*
Un graphe G est dit régulier si tous ses sommets ont même degré. Nous nous intéressons ici aux graphes 3-réguliers.
1. Quel est le nombre minimum de sommet que doit posséder un graphe 3-régulier?
2. Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 sommets, 6 sommets puis 7 sommets.
3. Que pouvez-vous en déduire?
4. Prouvez-le !

Exercice 5 *(Graphe des relations.)*
On considère que deux personnes (A et B) se connaissent si A connaît B et si réciproquement B connaît également A. (Ainsi, avec cette convention, on ne peut dire que vous "connaissiez" Zinedine Zidane!).
1. Montrer que, dans tout groupe de 6 personnes, l'une des propositions suivantes au moins est vraie:
(a). Trois personnes se connaissent mutuellement.
(b). Trois personnes ne se connaissent pas mutuellement.
2. Est-ce toujours vrai dans un groupe de 5 personnes?

Exercice 6 *(Graphe des relations II).*
Montrer que dans tout groupe de personnes, il y en a toujours deux ayant le même nombre d'amis présents.

Exercice 7 *(Connexité: exercice de lecture).*
Nous considérons les 2 graphes suivants. Pour chacun d'eux, donnez dites s'ils sont connexes. Si non, donnez leurs composantes de connextité.



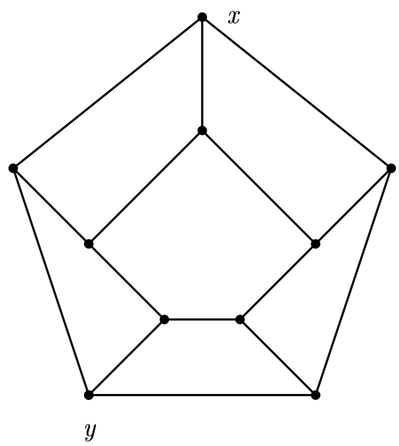


Exercice 8 *(Connexité théorique)*
Soit G un graphe connexe.
1. Montrez que si x est un sommet de degré 1, alors $G \setminus \{x\}$ est encore un graphe connexe.
2. Montrez que si G est connexe d'ordre $n \leq 2$, alors il doit au moins avoir n-1 arêtes.
Quand est-il de la réciproque?
3. Soit G un graphe d'ordre n que l'on ne suppose plus initialement connexe. Montrer que si G a strictement plus de (n-1)(n-2)/2 arêtes, alors G est connexe.

Exercice 9 *(Récurrence et connexité)*
1. Soit un graphe G d'ordre n et ayant strictement plus de (n-1)(n-2)/2 arêtes.
Montrez que ce graphe est connexe.
2. Soit G un graphe d'ordre n et ayant p composantes connexes. Montrez que ce graphe possède au plus (n-p)(n-p+1)/2 arêtes.

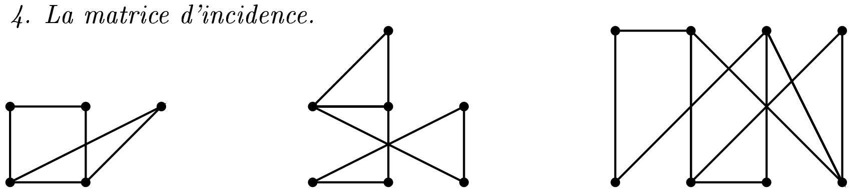
Exercice 10 *(Nombre de chemins dans un graphe.)*
On considère le graphe ci-contre.

1. *Combien de cycles simples possède-t-il ?*
2. *Combien de chemins simples de longueur 5 possède-t-il ?*
3. *Dénombrez toutes les chaînes ayant pour extrémintés x et y*



Chapitre 2: Notion de codage dans un graphe.

Exercice 11 *(Lecture d'un graphe)*
Pour les graphes suivant, donner:
1. Les ensembles V(G) et E(G).
2. Le degré de chaque sommet.
3. La matrice d'adjacence.
4. La matrice d'incidence.



Exercice 12 *(Matrice d'adjacence)*
1. Reconstruisez les graphes à partir des matrices d'adjacences suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pour chacun de ces graphes, donnez sa liste d'arêtes.

Exercice 13 *(Puissance d'une matrice d'adjacence)*
On considère le graphe G dont la matrice d'adjacence est la matrice A de l'exercice précédent.
1. Calculez A^2, puis A^3.
2. Donnez une interprétation des coefficients de ces matrices.

Notion d'isomorphisme: Cette notion permet de formaliser le fait que deux graphes puissent être identiques à étiquetage des sommets près.
Rappelons que deux graphes G et G' sont dit isomorphes s'il existe une application bijective de V(G) dans V(G') qui conserve l'adjacence, c'est à dire que: $\{x,y\} \in E(G) \Longleftrightarrow \{\phi(x),\phi(y)\} \in V(G')$.

Exercice 14 *(Sur les graphes isomorphes)*
Parmi les figures suivantes, citez celles qui sont des graphes.
Puis déterminez les classes d'isomorphismes (ie: donnez les graphes isomorphes).

L'importance du problème d'isomorphisme vient du fait qu'il est à la fois très courant (et naturel) de vouloir savoir si deux graphes donnés sont identiques, mais aussi que pratiquement, ce soit un problème, pour le moment, tres difficile à résoudre.

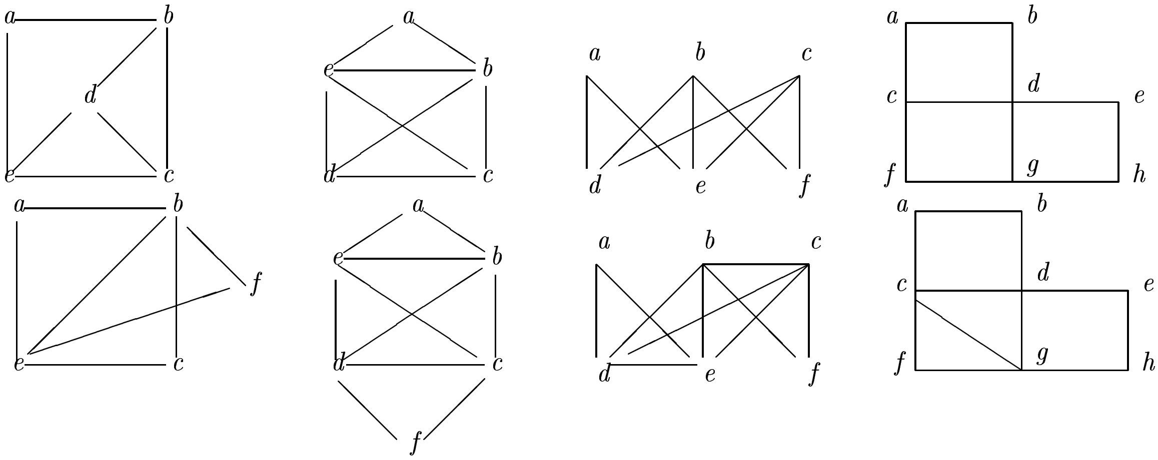
Exercice 15 *(Difficulté de la résolution du problème d'isomorphisme).*
1. Montrer que pour que G et G' soient deux graphes isomorphes, il est nécéssaire qu'ils aient:
- même nombre de sommets.
- même nombre d'arêtes.
2. Montrer que l'image d'un sommet $x \in V(G)$ par un isomorphisme ϕ est nécéssairement un sommet de V(G') de même degré.
Montrer alors que pour que G et G' soient isomorphes, il est nécéssaire qu'ils aient même suite de degrés (ie la liste ordonnée par exemple par ordre croissant des degrés des sommets doit être la même pour G et pour G').
Ces conditions ne sont pourtant pas suffisantes: trouvez un contre exemple a cette troisième condition.
3. Comme on ne connait pas pour l'heure de condition nécéssaire et suffisante afin de savoir si deux graphes sont isomorphes ou non, il ne nous reste, pour deux graphes G et G' vérifiant les conditions précédentes, que la méthode exhaustive, ie: tenter toutes les permutations possibles jusqu'a en trouver une qui marche (et alors les deux graphes sont isomorphes), ou jusqu'à les avoir toutes épuisées (et alors G et G' ne sont pas isomorphes).
On suppose que les graphes G et G' vérifient les conditions précédentes.
Combien y a t'il de bijections entre les ensembles V(G) et V(G'). (On pourra dans un premier temps se contenter d'un résultat n'utilisant pas d'informations sur les graphes, puis tenter d'insérer des paramètres sur les graphes afin de faire diminuer le nombre de solutions à parcourir).

Correction:
1. ϕ isomorphisme entre G et G' implique que ϕ soit une bijection entre les ensemble V(G) et V(G'), donc ces ensembles ont même cardinal.
Pour l'identité entre les nombres d'arêtes, on peut raisonner par contraposée: il suffit de voir que si G et G' n'ont pas même nombre d'arêtes, alors quelque soit la bijection ϕ entre les ensembles V(G) et V(G'), elle ne pourra vérifier la condition de conservation de l'adjacence.
2. L'image par un isomorphisme $\phi : V(G) \to V(G')$ d'un sommet x est un sommet $\phi(x)$ ayant même degré.
En effet, l'application ϕ conserve l'adjacence, donc $\{x,y\} \in E(G) \Longleftrightarrow \{\phi(x),\phi(y)\} \in E(G')$; ainsi, à chacun des voisins de x corresponds un voisin (différent car ϕ est une bijection) de $\phi(x)$: les sommets x et $\phi(x)$ ont donc mêmes degré.
Cette (importante) remarque permet de démontrer que les suites de degré de graphes isomorphes sont identiques.
3. Si l'on considère le nombre de bijection entre les ensembles de sommets, il y en a n!, ce qui est beaucoups.
Si l'on utilise la remarque précédente, on peut diminuer un peu la taille de l'ensemble á parcourir: un sommet devant par ϕ être envoyé sur un sommet de même degré, on peut se restreindre aux bijections vérifiant cette condition. Soit par exemple $(k_1, k_2, ..., k_{n-1})$ le nombre de sommet de degré 1,2,... n-1 dans G et G' (ce sont les mêmes suites). Le nombre de bijection envoyant un sommet de V(G) sur un sommet de même degré de $V(G')$ est alors de $k_1! * k_2! * ... * k_{n-1}!$, ce qui reste encore beaucoups pour un traitement algorithmique par une machine. On remarquera que dans l'exemple précédent, si tout les sommets sont de degré i, alors $k_i = n$ et sinon $k_j = 0$ pour $j \neq i$, et on retrouve la même complexité que notre premier calcul.

Exercice 16 *(Graphe complet)*
Un graphe est dit complet si son nombre d'arête est maximum.
1. Montrer que dans un graphe complet d'ordre n, chaque sommet est de degré n-1.
2. Donnez le nombre d'arêtes d'un graphe complet d'ordre n.
3. Soit G et G' deux graphes complets d'ordre n. Sont ils isomorphes?
4. Soit G un graphe d'ordre 6. Montrer que G ou $\bar{G}$ (son complémentaire) contient un triangle.
Note: On définit le complémentaire d'un graphe G comme étant le graphe $\bar{G}$ ayant même sommets, et dont les arêtes vérifient: $\{x,y\} \in E(\bar{G}) \Longleftrightarrow \{x,y\} \notin E(G)$.

Chapitre 3: Graphes eulériens, hamiltonien.

Exercice 17 *(Cycle eulérien)*
1. On rappel qu'un cycle eulérien d'un graphe est un cycle utilisant toutes les arêtes de G une fois exactement. Parmi les graphes suivants, quels sont ceux qui sont eulériens?



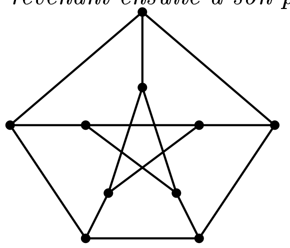
2. Pour chacun des graphes eulériens précédents, donnez un cycle eulérien en utilisant l'algorithme de Fleury.
3. Démontrez par récurrence qu'un graphe G est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pairs.

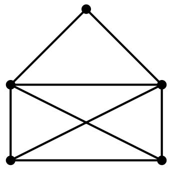
Exercice 18 *(Traversabilité d'un graphe.)*
Un graphe G est dit traversable s'il existe une chaîne (entre deux sommets x et y) eulérienne (donc une chaîne entre x et y utilisant chaques arêtes une fois exactement).
Un graphe traversable est exactement un graphe "pouvant être dessiné sans lever le crayon de la feuille et sans repasser sur un trai".
1. Quels sont, parmi les graphes précédents, ceux qui sont traversables ?
2. Pour ceux qui le sont, est-il possible de partir de n'importe quel sommet pour obtenir une telle chaîne eulérienne ?
3. Formulez une conjecture sur une condition que devrait remplir un graphe pour être traversable.
4. Démontrez la !

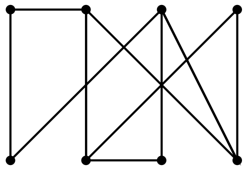
Exercice 19 *(Graphe complet et traversabilité)*
Notons K_n le graphe complet à n sommets (rappelons que G est complet si $\forall(x,y) \in V(G), x,y \in E(G)$.)
1. Donnez les valeurs de n pour lesquelles K_n est eulérien, puis pour lesquelles K_n est traversable.
2. Soit $K_{n,m}$ ($n \leq m$) le graphe complet bipartit ayant n et m sommets ie on a une partition de $V(G)$ en deux ensembles de sommets A d'ordre n et B d'ordre m, sans aucune arête interne, et $\forall a \in A, b \in B, \{a,b\} \in E(K_{n,m})$).
Combien y a t'il d'arêtes dans $K_{n,m}$?
3. Donnez les couples (n,m) tels que $K_{n,m}$ soit Eulérien, puis ceux tels que $K_{m,n}$ soit traversable.

Exercice 20 *(Graphes Hamiltoniens)*
Peut-on parcourir les graphes suivant en passant une fois et une seule par chacun des sommets et en

revenant ensuite à son point de départ ?



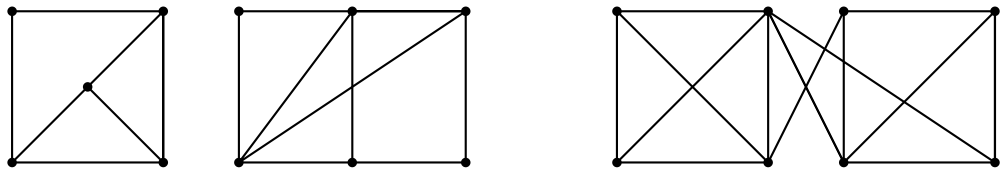




Exercice 21 *(Modélisation et graphes hamiltoniens)*
1. Un groupe de 9 élèves se réunit chaque jour autour d'une table ronde. Combien de jours peuvent-ils se réunir si l'on souhaite que personne n'ait deux fois le même voisin?
2. Cette fois-ci, au lieu de disposer d'une seule table ronde, il dispose d'une table de 5 places et d'une autre de 4 places.

Chapitre 4: Coloration d'un graphe et initiation à la complexité algorithmique.

Exercice 22 *(Introduction à la coloration d'un graphe.)*
Déterminer le nombre chromatique des graphes suivant:



Exercice 23 *(Modélisation et coloration)*
A la fameuse école Poudlard, les apprentits sorciers doivent s'inscrire au premier semestre à deux modules parmi les 9 possibles. On désigne par $M_1, M_2, ...M_9$ les différents modules. Dumbledore, le doyen de l'ecole, souhaite organiser des partiels sur un minimum de temps, donc organiser plusieurs partiels en parallèle. Si un étudiant au moins est inscrit aux modules M_i et M_j, on ne peut mettre en même temps les deux partiels équivalents (la formule d'ubiquité étante interdite lors des épreuves afin d'éviter toutes fraudes). Voici les paires de modules ayant au moins un étudiant en commun: M_1M_2; M_1M_4; M_2M_3; M_2M_5; M_3M_5; M_3M_8; M_4M_5; M_5M_6; M_4M_8; M_5M_8; M_6M_8; M_6M_9; M_8M_9.
1. Modélisez la situation à l'aide d'un graphe.
2. Etant donné que les étudiants doivent s'inscrire à deux modules différents, quel est le degré minimum d'un sommet du graphe ? Quel explication donner pour justifier le degré du sommet M_7 ?
3. Quelle notion de théorie des graphes permet de modéliser la contrainte relative aux partiels se déroulant en parallèle?
4. Déterminez alors le nombre minimal de crénaux horraires qu'il faudra nécessairement.

Exercice 24 *(Modélisation d'un problème de coloration)*
Sept élèves, désigné par leurs initiales A,B,C,D,E,F et G se sont rendus dans une petite pièce servant de bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise "qui à rencontré qui" (la bibliothèque étant petite, deux personnes présentes au même moment s'y rencontrent nécessairement).

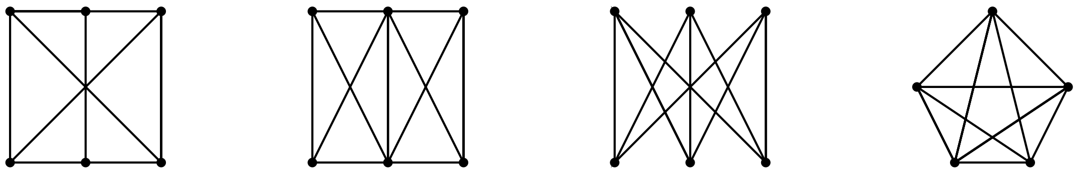
élève	*Amélie*	*Bertrand*	*Carole*	*Damien*	*Elise*	*Fabien*	*Gérard*
a rencontré	*D,E*	*D,F,G*	*E,G*	*A,B,E*	*A,C,D,F*	*B,E,G*	*B,C,F*

1. Modéliser les rencontres par un graphe, sachant que chacune des personnes présente à la bibliothèque avait une place assise différente.
2. De combien de place assises doit disposer la bibliothèque ?

Exercice 25 *(Récurrence: Formule de Brooks.)*
Soit G un graphe. $\Delta(G)$ désignera le plus grand degré des sommet de G, et $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de ce graphe. Si x désigne un sommet de G, $G\backslash x$ désignera le graphe obtenu par suppression de x dans G.
1. Quelle relation y a-t-il entre $\Delta(G)$ et $\Delta(G \setminus x)$?
2. Démontrer que $\chi(G \setminus x) + 1 \geq \chi(G) \geq \chi(G \setminus x)$.
3. Par une récurrence sur n l'ordre du graphe, démontrer que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
4. Peut-on espérer obtenir une formule du type : $\Delta(G) - \alpha \leq \chi(G)$, où α serait une constante ?

Exercice 26 *(Théorème de Koenig).*
Démontrer le théorème suivant, dû à Konig [1916]:
Un graphe G est 2-colorable si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire.

Exercice 27 *(Coloration et graphe planaire).*
Un graphe G est dit planaire si il existe un graphe G' isomorphe à G tel que les arêtes de G', dessinées dans le plan, ne se coupent pas hors des sommets.
1. Les graphes suivant sont-ils planaires?



2. Pour chacun de ces graphes, déterminer leur nombre chromatique $\chi(G_i)$.

Exercice 28 *(Complexité algorithmique d'algorithmes simples).*
Déteriner la complexité algorithmique des algorithmes suivants:
1. Algorithme de multiplication matricielle de matrices carrées $n \times n$.
2. Algorithme de détection du plus grand élément dans une liste de n éléments.
3. Algorithmes de répartition des sujets d'examens dans une classe de n élèves:
a- La première façon est de transmetre une unique pile de sujets, avec pour consigne de donner la pile à un voisin qui ne possède pas de sujet.
b- La seconde est de donner une pile en précisant aux élèves de transmetre deux piles, chacunes d'elle à un voisin n'ayant pas de sujet.
Dans les deux cas, on considèrera une notion de "voisins" suffisament large pour que cela ne pose aucun problème.

Exercice 29 *(Coloration des arêtes d'un graphe.)*
Nous allons ici nous intéresser à un problème proche de celui de la coloration.
Soit $G = (V, E)$ un graphe. Au lieu de définir une application de coloration partant de l'ensemble des sommets V de G, nous pouvons définir une application coloration des arêtes $c_a : E \to \{1, 2, 3, ..., k\}$, telle que deux arêtes incidentes au même sommet n'aient pas même couleur. L'indice chromatique d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs distinctes necessaires pour effectuer une coloration des arêtes.
1. Quelle est l'indice chromatique des graphes de l'exercice "coloration et graphe planaire" ?
2. Nous allons présenter une façon systèmatique de se ramener au problème de coloration de sommets. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Nous allons lui associer le graphe $L(G) = (V', E')$ dit graphe des arêtes de G, définit par: $V' = E$ (ie: les sommets de $L(G)$ correspondent aux arêtes de G), et deux sommmets de $L(G)$ sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans G à ces sommets sont adjacentes.
3. Pour chacuns des graphes considérés dans la question 1, donnez son graphe des arêtes associé $L(G)$.
4. Quelle est le nombre chromatique de ces graphes des arêtes ?
5. Formulez une conjecture liant le nombre chromatique de $L(G)$ et l'indice chromatique de G.
6. Démontrer cette conjecture !

Exercice 30 *(Modélisation)*
En fin d'année, chaque étudiant doit passer un oral d'une heure avec les professeurs des modules dont il n'a pas obtenu la moyenne. On cherche à organiser les épreuves de manière à ce qu'elles se terminent au plus tôt.
Les matières sont "I" (informatique), "M" (mathématiques), "A" (anglais) et "F" (Français).

élève	*Benjamin*	*Cedric*	*David*	*Emy*	*Florence*
doit repasser	*A,F*	*M,A*	*A,I*	*M,I*	*I,A*

1. Représentez les données précédentes à l'aide d'un graphe dont les somemts seront les étudiants et les enseignants, et dont l'arête $\{i, j\}$ existe si l'étudiant i doit passer l'examen oral avec l'enseignant j.
2. A quelle notion se rapporte le problème de minimisation du temps des épreuves ?
3. Résolvez ce problème.

Chapitre 5: Introduction aux graphes orientés.

Nous abordons désormais la notion de graphe orienté; ainsi, nous avons plus une "simple" relation binaire entre les sommets (modélisées par les arêtes), mais une relation avec une orientation (la relation binaire n'est plus symétrique). On note par un arc (x,y) le lien allant du sommet x au sommet y (nous pouvons dire aussi que "x domine y"), et nous distinguons la notion de degré entrant $d^-(x)$ (somme des arcs dont x est l'extrémité terminale) de la notion de degré sortant $d^+(x)$ (arcs dont x est l'extrémité initiale).

Exercice 31 *(Construction de graphes)*
1. Peut on construire les graphes orientés ayant les degrés suivants:

$A =$

d^+	d^-
2	0
2	1
1	2
0	2

; $B =$

d^+	d^-
2	0
1	2
1	2
1	2
2	1

; $C =$

d^+	d^-
2	3
2	1
1	1
1	0
0	0
0	0

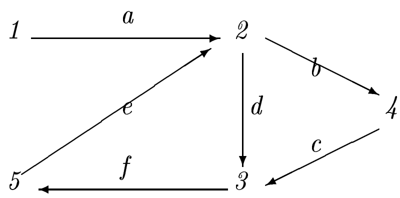
. $D =$

d^+	d^-
2	2
2	2
2	2
2	2
2	2
2	2

.

2. Existe-t-il des graphes ayant ces m êmes degrés et qui soient non-isomorphes ?

Exercice 32 *(Codage d'un graphe).*
On considère le graphe ci-contre:
Donnez son codage par sa matrice d'adjacence.
Donnez son codage par sa matrice d'incidence.
Ce graphe comporte-il des circuits? Si oui, donnez les.
Enfin, donnez les composantes fortement connexes de ce graphe.



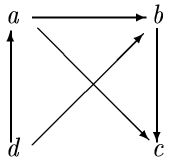
Exercice 33 *(Reconstitution d'un graphe orienté à partir de son codage)*
1. Reconstituer les graphes à partir de leurs matrices d'adjacences:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Reconstituer les graphes à partir de leurs matrices d'incidence:

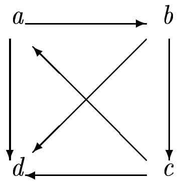
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

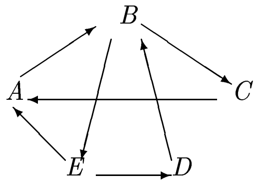
Exercice 34 *(Puissance d'une matrice d'adjacence)*
On considère le graphe ci contre.
Donnez sa matrice d'adjacence A.
Calculer A^2, puis A^3 et donnez
une interprétation des coefficients de ces matrices.
Démontrez cette relation par récurrence.

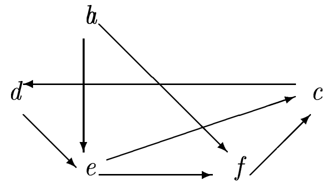


Exercice 35 *(Forte connexité et composantes fortement connexes)*
Pour chacun des graphes suivants, dire s'il est fortement connexe. Si non, alors donnez ses composantes

fortement connexes.







Exercice 36 *(Modelisation; différence connexe / forte connexité).*
Soit $\overrightarrow{G} = (V, A)$ *un graphe orienté. On défini le graphe* $G = (V, E)$ *comme le graphe ayant même ensemble de sommet que* $\overrightarrow{G}$ *et possédant l'arête* $\{x, y\}$ *si* $\overrightarrow{G}$ *possède soit l'arc* (x, y)*, soit l'arc* (y, x)*. Le graphe orienté* $\overrightarrow{G}$ *est dit "connexe" si le graphe* $G = (V, E)$ *l'est.*
1- Soit $\overrightarrow{G_1}$ *le graphe orienté défini par le réseau routier d'une ville. Formulez une propriété relative à la connexité ou à la forte connexité que doit nécessairement vérifier le graphe* $\overrightarrow{G_1}$*.*
2- Soit $\overrightarrow{G_2}$ *le graphe défini par la descendance d'une personne (ie: les sommets représentent des indivudus et l'arc* (x, y) *signifie que* y *est un descendant de* x*). De même, formulez une propriété du graphe* $\overrightarrow{G_2}$ *relative à la connexité ou à la forte conexité.*

Exercice 37 *(Connexité et relation d'équivalence)*
On peut modéliser une relation binaire $\Re$ *sur un ensemble comme étant un arc entre deux sommets (ainsi, la relation a*$\Re$*b est représentée par l'arc (orienté) (a,b)), les sommets du graphe ainsi crée représentant évidement les éléments de l'ensemble initial.*
1. On définit sur l'ensemble $X = \{0, 1, 2, ..., 9\}$ *la relation* $\Re$ *par:* $x \Re y \Longleftrightarrow x - y$ *multiple de* 3*.*
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, et représentez le graphe associé.
2. On définit maintenant sur le graphe orienté G=(V,E) la relation suivante:

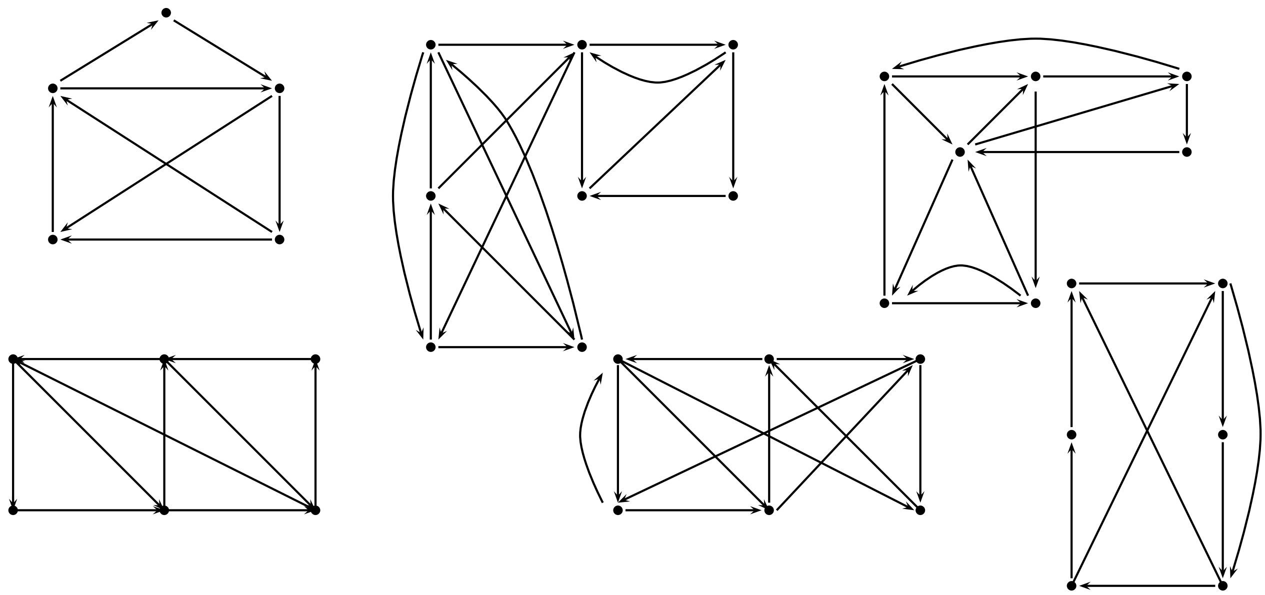
$$\forall (x, y),\ x \Re y \longleftrightarrow \begin{cases} \textit{soit} \quad x = y \\ \textit{soit il existe une chaine entre } x \textit{ et } y \end{cases}$$

Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.
Montrer que les clases d'équivalences de cette relation sont les composantes connexes du graphe G.
3. En vous inspirant de la question précédente, donnez une définition de la notion de composantes fortement connexe d'un graphe comme classes d'équivalence d'une certaine relation.

Correction:
Pour montrer que cette relation est bien une relation d'équivalence, montrons qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.
Réflexive: x$\Re$*x puisque x-x=0, qui est bien un multiple de 3.*
Symétrique: Supposons donc que x$\Re$*y, donc x-y est un multiple de 3, soit par exemple 3k. Alors y-x=-3k est donc un multiple de 3, d'ou y*$\Re$*x.*
Transitive: Supposons donc x$\Re$*y et y*$\Re$*z; donc x-y=3k et y-z=3k', donc x-z=x-y+y-z=3k-3k'=3 (k-k'), et c'est donc bien un multiple de 3, donc on a x*$\Re$*z.*
2. De même, il suffit de vérifier les conditions précédentes; $\Re$ *est évidement réflexive, puisque { x} est une chaîne reliant x à x, donc x*$\Re$*x. La symétrie est aussi évidente puisqu'une chaîne entre x et y est aussi une chaîne entre y et x. Enfin, si l'on a une chaîne entre x et y et une autre entre y et z, on obtient aisément une chaîne entre x et z en concaténant les chaînes (ie on les met bout à bout). Ainsi, on en déduit que la relation* $\Re$ *ainsi définie est une relation réflexive, symétrique et transitive, donc d'équivalence.*
Soient x et y deux sommets d'une même classe d'équivalence du graphe G par cette relation. Par définition de la classe déquivalence, nous savons que x$\Re$*y, donc il existe une chaîne entre x et y, d'ou x et y sont dans une même composante connexe. Inversement, si l'on considère x et y deux sommets d'une même composante connexe de G, il existe donc une chaîne reliant x à y, et donc x*$\Re$*y, ce qui implique qu'ils soient dans la même composante connexe.*

L'exercice précédent montre que l'on peut définir certains objets de théorie des graphes comme objets algébriques, et réciproquement; cette remarque est vraie pour de nombreux autres domaines (topologie, probabilité), ce qui donne une grande richesse et variété à la théorie des graphes.

Exercice 38 *(Graphes orientés eulériens.)*
Pour chacuns des graphes orientés suivants, dites s'il est eulérien. S'il l'est effectivement, donnez à l'aide de l'algorithme de Fleury un cycle eulérien.



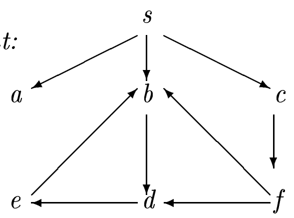
Exercice 39 *(Graphes orientés traversables.)*
Un chemin C d'un graphe orienté $\overrightarrow{G}$ est dit être eulérien si passe une fois et une seule par tous les arcs de $\overrightarrow{G}$. Un graphe orienté $\overrightarrow{G}$ est dit traversable s'il existe deux sommets x et y de $\overrightarrow{G}$ tels qu'il existe un chemin eulérien allant de x à y dans $\overrightarrow{G}$.
1. Parmi les graphes orientés précédents, quels sont ceux qui sont traversables ?
2. Parmi les graphes qui sont traversables et non eulérien, à partir de quels sommets doit-on partir afin d'obtenir un chemin eulérien ?
3. Formulez une proposition caractérisant les graphes orientés eulériens et démontrez celle-ci.

Exercice 40 *(Théorème de Moon).*
La question de savoir si un graphe orienté $\overrightarrow{G}$ est hamiltonien est très complexe (le problème étant $\mathcal{NP}-complet$). Néanmoins, nous pouvons répondre à cette question pour une sous famille de graphes orientés. Un tournoi $T=(V(T),A(T))$ est un graphe orienté complet sans boucle, ie: pour tout couple de sommets x et y dans $V(T)$, soit l'arc $(x,y)\in A(T)$, soit $(y,x)\in A(T)$.
Nous allons démontrer le théorème de Moon suivant, qui implique que tout tournoi fortement connexe T d'ordre ≥ 3 est hamiltonien.
Théoème de Moon: *Soit T un tournoi fortement connexe d'ordre $n\geq 3$. Alors, pour tout sommet x et tout entier $k\in\{3,4,5,...,n\}$, il existe dans T un circuit de longueur k passant par x.*
1. Initialisation de la récurrence: Soit x un sommet de T. On considère les ensembles $\Gamma^+(x)$ et $\Gamma^-(x)$. Quels arguments permettent de conclurent à l'existence d'un circuit de longueur 3 passsant par x ?
2. On suppose que le théorème est vrai pour k entier de $\{3,4,...,n-1\}$ et on le démontre pour $k+1$. Soit donc $\mathcal{C}=x_0x_1...x_k$ un cycle de T de longueur k, passant par x. Après renumérotation, nous avons: $x_0=x_k=x$.
Cas a- Supposons qu'il existe un sommet $y\in V(C)\setminus V(T)$ tel que y domine un sommet de $\mathcal{C}$ et soit aussi dominè par un sommet de $\mathcal{C}$. Démontrer qu'il existe alors un circuit de longueur $k+1$ passant par x.

Cas b- Si il n'existe pas de tel sommet, alors on considère l'ensemble $\mathcal{R}$ des sommets domminant les sommets de $\mathcal{C}$ et un ensemble $\mathcal{S}$ de sommet qui sont dominé par ceux de $\mathcal{C}$.
Démontrer que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont non-vide et qu'il existe alors un circuit de longueur $k+1$ passant par x dans T.

Chapitre 6: Cheminement dans un graphe et un graphe orienté

Exercice 41 *(Algorithme de parcours d'un graphe à partir d'un sommet)*
Soit G un graphe orienté, et s un sommet de G. A tout sommet x, on associe une marque booléenne M(x). L dénote une liste.
On considère l'algorithme suivant:



$\forall x \in V(G), M(x) \leftarrow faux$
$M(s) \leftarrow vrai;$
$L \leftarrow \{s\}.$
Tant que L non vide, faire:
Choisir $x \in L$.
Si tout les successeurs z de x sont tels que M(z)=vrai, ou si x n'a aucun successeur, alors $L \leftarrow L \setminus \{x\}$
Sinon, soit y un successeur de x tel que M(y)=faux; faire $M(y) \leftarrow vrai$ *et* $L \leftarrow L \cup \{y\}$
1. Traitez le graphe ci contre en gérant L comme une pile.
2. Traitez le en gérant cette fois-ci L comme une file.

Exercice 42 *(Problème du plus court chemin.)*
Soit G un graphe dont les arêtes sont pondérées (distances). On donne la matrice des distances suivante:

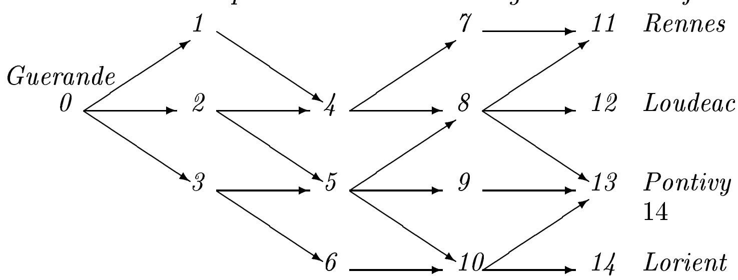
$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & 2 & \infty & \infty & 8 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 1 & \infty & \infty & 2 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 8 & \infty & 0 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & \infty & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

1. Reconstituez, à partir de cette matrice de distance, le graphe initial.
2. A l'aide de l'algorithme de Dijkstra-Moore, trouvez le plus court chemin allant de A en B.
3. Même question, cette fois-ci à l'aide de l'algorithme de Bellman-Ford.

Exercice 43 *(Problème de cheminement optimal)*
Sire Gwendal, paludier à Guérande, en Pays de Loire, désire aller vendre sa récolte de sel dans l'une des 4 grandes foires de sa région: soit Renne (ville 11), soit à Louéac (ville 12), soit à Pontivy (ville 13), soit à Lorient (ville 14).
Il connaît les gains qu'il peut faire dans chacune de ces 4 villes, à savoir respectivement 550 ècus, 580, 590 et 600 écus à Lorient. Il connaît aussi les différents itinéraires pouvant le mener de Guérande (ville notée 0) à chacune des 4 villes, mais à chaques villages, villes ou ponts, il doit s'acquitter d'un droit de passage:

Ville	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	10	13	14
Peage(ecu)	10	10	15	5	15	10	3	10	5	20	4	5	20	7

1. En ajoutant un sommet virtuel à l'arrivée, transformer ce problème en un problème de cheminement optimal.
2. Résolvez ce problème à l'aide de l'algorithme de Dijkra-Moore.



Exercice 44 *(Différence Bellman-Ford, Dijkra-Moore)*
Nous savons que l'algorithme de Dijkra-Moore ne peut fonctionner que sur un graphe valué positivement, alors que l'algorithme de Bellman-Ford peut lui, être utilisé avec un graphe arcs-valué quelconque.
Que pensez vous du raisonnement suivant: Soit (G,p) un graphe valué. On note $m = min_{(x,y)\in E(G)} p(x,y)$.
On considère le graphe (G',p') identique au graphe G, mais dont la valuation est: $p'(x,y) = p(x,y) - m$.
Le graphe G' sera alors valué positivement, et tout chemin optimal de G' sera un chemin optimal de G, donc on pourra utiliser l'algorithme de Dijkra-Moore dans G' afin de trouver un chemin optimal dans le graphe G.

Exercice 45 *(Puissance de la matrice d'adjacence d'un graphe)*
Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G. On note $a_{i,j}^{(k)}$ *le coefficient courant de la matrice* A^k.
Démontrez que $a_{i,j}^{(k)}$ *représente le nombre de chemin de longueur k allant du sommet i au sommet j.*

Correction:
On procède par récurrence: Pour k=1, c'est la définition du coefficient $a_{i,j}$ *de la matrice d'djacence.*
Supposons donc que ce soit vrai jusqu'au rang k, et démontrons la formule au rang k+1.
$A^{k+1} = A^k * A$, *donc par identification des coefficients de la matrice, nous avons:*

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{s=1}^{n} a_{i,s}^{(k)} * a_{s,j}^{(1)}$$

Par hypothèse de récurrence, $a_{i,s}^{(k)}$ *représente le nombre de chemin de longueur k entre les sommets i et s; en remarquant que tout chemin de longueur k+1 allant de i à j peut se décomposer en un chemin de longueur k reliant i à un certain sommet (s), et en un arc (s,j), on en déduit alors que* $a_{i,j}^{(k+1)}$ *représente bien le nombre de chemin de longueur k+1 reliant i à j....*

Exercice 46 *Problème d'ordonnancement*
Lors de la constrution d'une maison, on distingue 10 travaux distincts.

Tache	Libellé de la tache	Durée	Taches à terminer avant
T1	gros oeuvre	8	
T2	charpente	2	T1
T3	Toiture	1	T2,T1
T4	Plomberie	3	T1
T5	Instalation electrique	2	T1
T6	Ravalement	1	T1,T2,T3,T4
T7	Fenêtre	1	T1,T2
T8	Aménageme,ts extérieurs	1	T3,T4,T5
T9	Plâtres	2	T1,T3,T4,T5,T7
T10	Sols	2	T4,T5,T7,T9
T11	Peinture	2	T9
T10	Emménagement	1	Toutes les tâches

Modélisez la situation proposée à l'aide d'un graphe, et déterminer la durée minimale du projet.
Facultatif: Indiquez les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche permettant de garantir cette durée optimale.

Chapitre 7: Arbres et arborescences

Exercice 47 *(Définitions équivalentes des arbres)*
Soit G un graphe d'ordre n. Montrer l'équivalence entre les propriètés suivantes:
1. G est connexe sans cycle.
2. G est connexe et a (n-1) arêtes.
3. G connexe minimal au sens des arêtes, ie si $F \subset E(G), F \neq E(G)$, alors (V(G),F) est non connexe.
4. G est sans cycle et a (n-1) arcs.
5. G est sans cycle et est minimal au sens des arêtes, ie si $F \subset E(G), F \neq E(G)$, alors (V(G),F) a au moins un cycle.
6. Pour tout sommet $(x, y) \in V(G)$, il existe une unique chaîne entre x et y.

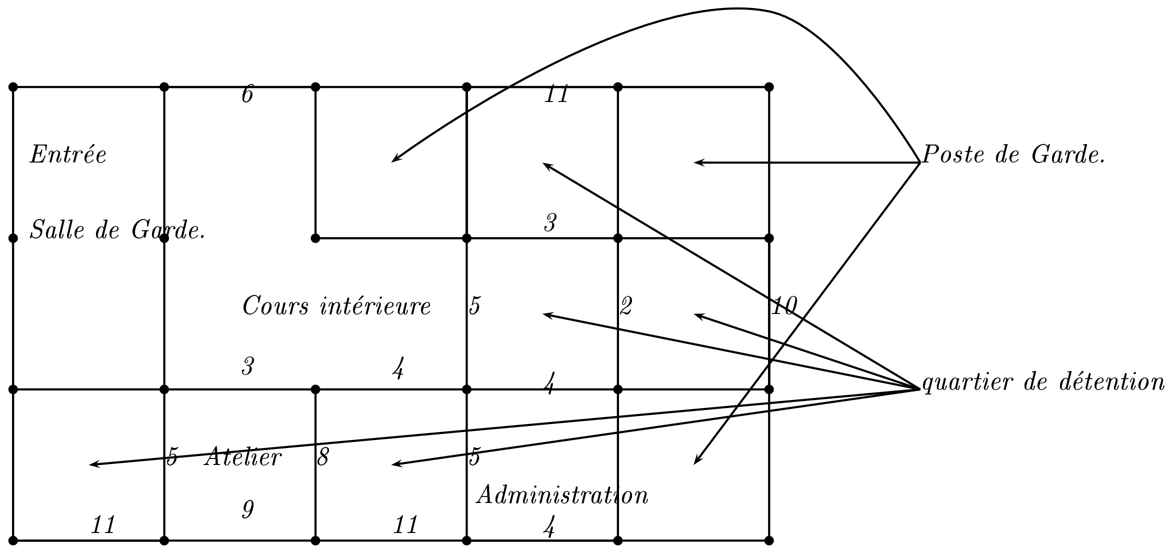
Exercice 48 *Démonstration de l'algorithme de Prim*
Soit G un graphe connexe valué d'ordre n, dont les sommets sont notés $v_1, v_2, ..., v_n$. On considère l'algorithme suivant:
(1). On part d'un abre initial partiel A_1 réduit à un sommet quelconque v_{i_0}, et on marque ce sommet.
(2). A chaque itération de l'algorithme, on note V_p l'ensemble des sommets marqués, et on construit A_p en augmentant A_{p-1} de l'arête de poids minimum dont une seule extrémit'e est marquée.
(3). On marque l'extrémité non marqué de l'arête selectionné, et on retourne en 2, à moins que l'ensemble des sommets ne soient marqués.
Si tout les sommets sont marqués, alors A_n contient l'ensemble des arêtes d'un arbre couvrant de poids minimum.
1. L'algorithme se termine-t-il?
Indication: démontrez qu'étant donné un ensemble A_p non vide et ne contenant pas l'ensemble des sommets des sommets de G, alors l'algorithme se poursuit, et que l'ensemble A_{p+1} est différent de l'ensemble A_p (ie: l'algorithme ne boucle pas).
2. Démontrez que l'on obtient bien finalement un arbre couvrant de poids minimum.

Exercice 49 *Problème d'interconnexion entre des villes.*
On souhaite créer un réseau d'interconnexion électrique dans un pays en voie de développement entre 6 villes, notées $\{1, 2, ..., 6\}$. Une étude a éé menée sur les différents coûts de constructions entre ces villes; on le donne sous forme de la matrice suivante (le coefficient $a_{i,j}$ représentant le coût de construction entre les villes i et j):

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 & \infty & \infty \\ 10 & 0 & 20 & 30 & \infty & 50 \\ 20 & 20 & 0 & 10 & 50 & 70 \\ 30 & 30 & 10 & 0 & 55 & 30 \\ \infty & \infty & 50 & 55 & 0 & 60 \\ \infty & 50 & 70 & 30 & 60 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Construisez le graphe représentant ces villes, leurs liens et le cout de la construction de ce lien.
2. A quel problème classique de thèorie des graphe's se problème se ramène-t-il?
3. Résolvez celui-ci par les algorithmes classiques.

Exercice 50 *La grande évasion*
Un groupe d'activiste souhaite libérer les prisonniers politiques retenus dans une prison. D'après les renseignements founis par des informateurs dans la place, on a, en plus du plan des différents quartiers de détentions de la prison, les temps qu'il faut pour forcer les serrures entre les 2 zones. Le dessin ci dessous représente donc les murs de la prison, avec le temps associé au passage lorsqu'il est possible...



Il faut libérer tous les prisoniers sans allerter les gardes, donc sans entrer dans l'un des postes de gardes. Il est possible de passer par la cours intérieure, par l'administration et par l'atelier bien qu'il n'y ait pas de prisonier à libérer là bas.
Modélisez ce problème à l'aide d'un graphe, et trouvez le moyen le plus rapide pour libérer tous les prisonniers.

Chapitre 8: Flots dans un réseau de transport.

Exercice 51 *(Recherche du flot maximum.)*
Considérons le réseau de transport dont la matrice des capacités est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les conditions à vérifier pour affirmer que c'est bien un réseau de transport ?
2. En utilisant l'algorithme de Ford et Fulkerson, donner un flot maximum pour ce réseau de transport.
3. Quelles sont les canalisations saturées à remplacer préférentiellement pour augmenter le flux total de ce réseau ?

Exercice 52 *(Problème d'affectation de tâches.)*
Une entreprise ouvre 5 nouveaux postes au recrutement interne: $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$.
L'entreprise dispose de 5 candidats internes pour ces postes, chacun pouvant obtenir un ou plusieur des postes selon ses compétences. La question est de savoir quelle affectation de personne / poste faire afin de maximiser le nombre de poste.
Nous donnons ci-dessous la liste des personnes et des postes qu'elle peut obtenir.

Jean	P_1, P_2, P_3
Marie	P_1, P_3
Karim	P_2, P_3, P_4, P_5
Ismael	P_1, P_3
Florent	P_2, P_3

1. Modélisez ce type de situation par un réseau de transport.
2. Résolvez alors ce problème afin de maximiser le nombre de poste rempli.
3. Cette fois-ci, les personnes sont notées sur leurs futurs postes. Le but est alors de trouver l'affectation des personnes / postes maximisant les compétences au sein de l'entreprise.

Jean	$P_1(5), P_2(6), P_3(3)$
Marie	$P_1(6), P_3(5)$
Karim	$P_2(9), P_3(9), P_4(6), P_5(5)$
Ismael	$P_1(3), P_3(3)$
Florent	$P_2(7), P_3(5)$

Bibliographie:

Les exercices I.3 sont issus du polycopié d'exercice d'Eric Sopena, disponible sur son site web.