Préparation au Capes de Mathématiques

Document pour travail d'été

Version 1.0

1er Juillet 2008

Jean-François Culus

jean-francois.culus@iufm-martinique.fr

Contenu du document.

1 $\mathcal{A}$vant propos

L'année de préparation au Capes étant extrèmement courte (du 1er Septembre à mi Mars pour les écrits), il est très utile de mettre à profit les deux mois d'été pour réviser quelques bases. Autant alors être guidé dans ce travail, afin qu'il cible rapidement les aspects essentiels du programme.

1.1 Le programme du Capes externe de mathématiques

Vous devez vous le procurer (c'est très facile sur internet). Il porte essentiellement sur les deux premières années de licence avec une partie du L3 (en fait, à l'exception notable de la partie fonctions holomorphes des programmes de licence de maths). Néanmoins, il vous faudra maîtriser bien plus finement les notions que durant votre parcours de licence et surtout, être apte à changer de domaines dans un même problème.

1.2 Les concours que vous pouvez présenter

Il est intéressant de lister les différents concours que la formation vous permet de préparer (au moins en grande partie). La liste qui suit hiérarchise, disons, du plus facile au plus difficie (mathématiquement parlant). Pour de plus amples renseignements (administratifs, sur les programmes, sur les épreuves), vous <u>devez</u> vous reporter aux rapports des jurys du concours qui vous intéresse. Vous les trouverez facilement et gratuitement pour les plus récents sur internet (c.f. rubrique liens ou ressources du site Web de la préparation Capes).
Rapidement, je vous rappelle l'existence de différents types d'établissements (les lycées d'enseignement général, les lycées professionnels, les lycées agricoles...) et qu'à chaque type de lycée correspond un concours spécifique. Pour les voies d'accès à l'enseigment publique, vous dépendrez du ministère de l'éducation nationale (E.N.) ou du ministère de l'agriculture (pour les lycées agricoles). Si vous souhaitez enseigner dans un établissement privé (sous contrat d'association avec l'E.N.) vous devez prendre contact avec l'autorité diocésaine de votre habitation (il y a des formalités / modalités différentes). Les concours du privé portent des intitulés différents (Cafep / Capes) mais sont généralement communs avec le concours de l'enseignement publique (le sujet est identique, seule change la liste dans laquelle vous êtes admissible; la note d'admissibilité est identique dans les deux voies d'accès). Enfin, un même concours se décline généralement en trois voies d'accès: externe (pour les étudiants), interne (si vous bénéficiez d'un nombre suffisant d'années d'expérience en tant que vacataire dans des établissements spécifiques) et 3ième voie (pour les personnes pouvant justifier d'un emploi salarié durant cinq ans). Je vous laisse le soin de vous renseigner (c.f. les sites officiels) sur les conditions exactes d'admission à telle ou telle voie.

- Caplp (externe / interne / 3ieme voie) Maths/Physique: Le Caplp de maths / physique est un concours bidisciplinaire (maths et Sciences-Physiques / chimie) qui permet d'enseigner dans les lycées professionnels. Durant votre année de préparation (au Capes de Mathématiques à l'IUFM de Martinique), vous aborderez (très largement) l'ensemble du programme de mathématiques du Caplp. Par contre, l'IUFM ne prépare pas à l'épreuve de Physique/ chimie. Aussi, si vous ambitionnez de passer ce concours, vous faudrat-il préparer cette épreuve de manière autonome. Nous aurons l'occasion de faire des épreuves de Caplp (en mathématiques), en particulier dans le présent travail d'été, puisque ces problèmes sont (bien) plus accessibles que ceux proposés au Capes de Maths. Ce concours existe aussi pour l'enseignement agricole (il est alors appelé PAPL Maths Sciences Physiques). Les trois voies d'accès (externe, interne et 3ieme voies) sont disponibles (selon les années), mais il ne semble pas y avoir de grosses différences de niveau entre ces coucours pour l'épreuve de mathématiques.

- Capes interne de mathématiques. Ce concours est réservé aux personnes pouvant justifier de 3 années d'enseignement en tant que vacataires de l'éducation nationale (pour les spécificités des calculs, se reporter au B.O. spécial N6 du 13/07/06). Il n'y a alors qu'une seule épreuve écrite (et non deux comme au concours externe). Même si le sujet peut paraître plus abordable que ceux du Capes externe, le nombre assez important de personnes le présentant et le relativement faible nombre de postes en fait un concours assez difficile.

  > C'est un point commun à tout concours: ce qui compte n'est pas votre réussite individuelle aux épreuves, mais votre prestation relative aux autres candidats du concours. Ainsi, une mauvaise copie (par rapport au sujet) peut être bonne si les autres sont encore plus mauvaises... et inversement (une bonne composition ne vous garantit en rien l'admissibilité, si les autres copies sont encore meilleures). En bref, tout concours est difficile par la nature même du concours (sélectivité). Il y a environ 4000 candidats pour 800 postes, il vous faut donc être parmi les 800 meilleurs candidats.

Il est possible, pour ceux remplissant les conditions d'accès, de se présenter à la fois au concours externe et au concours interne. Le programme du Capes interne est inclus dans celui du Capes externe, même si vous êtes à peu près assuré d'avoir une épreuve de géométrie.

- Capes externe de mathématiques. C'est donc le concours de recrutement des professeurs du second degré de l'education nationale, accéssible à tous étudiants disposant d'une licence.
  Note importante: La condition pour passer n'importe quel Capes est de déternir une licence (jusqu'au concours 2009), non pas une licence du domaine en question. Ainsi, si vous disposez d'une licence de Sciences physiques ou d'économie, vous pouvez présenter ce concours. Bien sûr, il faut réellement avoir un bon niveau en maths pour espérer avoir (éventuellement au bout de quelques années) le Capes de maths. Il vous faudra aussi combler vos lacunes par exemple en géométrie si vous n'en avez pas assez pratiqué durant votre cursus. Néanmoins, cela est tout à fait possible de présenter et obtenir ce concours sans une licence de maths!
  Ce concours consiste en deux épreuves écrites (généralement la première est une épreuve d'analyse ou de probabilités, la seconde d'algèbre ou de géométrie, mais rien n'est fixé par les textes officiels). Les écrits sont mi-mars, ce qui signifie que l'année de préparation aux écrits est extrèmement courte. Les admissibles passent fin juin/début juillet deux épreuves orales à côté de Paris (Sceaux). La première épreuve consiste en la préparation d'une leçon (il y a 80 leçons possibles à préparer durant l'année). Le jour J, vous tirez un couplage de 2 leçons, et vous aurez 2 heures pour préparer l'une d'elles, sans aucun document (d'où la difficulté de l'épreuve). Les leçons sont soit de niveau Terminal, soit supéreur (L1). La seconde épreuve consiste en un dossier composé d'un thème générique (exemple Arithmétique), d'un exercice du jury et de quelques questions. Vous avez alors 2 heures de préparation (avec livres autorisés) pour présenter un dossier sur cette thématique (cette épreuve, dite sur dossier, est un oral préprofessionnel). Il s'agit donc de montrer que sur le thème d'Arithmétique, vous pouvez proposer à des élèves de TS spécialité maths un choix d'exercices pertinents et que vous possédez un recul vis-à-vis des exercices proposés.

  Note: Il existe aussi une 3ième voie pour les personnes justifiant de 5 années de travail dans le domaine privé ainsi que d'une licence. Ceux-ci passent la première épreuve écrite du Capes externe et les sensiblement mêmes épreuves orales.

- Agrégation (interne) de mathématiques. C'est le concours de l'agrégation réservé aux enseignants du second degré justifiant de 5 années d'activités. Son niveau est réellement intermédiaire entre celui du Capes et celui de l'Agrégation externe, ce qui le rend plus accessible. Vous disposez en Martinique d'une préparation à l'Agrégation interne de mathématiques dispensée par la formation continue. Ce concours existe aussi pour l'enseignement privé (sous contrat d'association); il s'agit du CAER.

- Agrégation (externe) de mathématiques. C'est le plus haut concours de l'éducation nationale. Il permet donc d'intégrer le corps des agrégés de l'EN. Le programme est **très** sensiblement supérieur à celui du capes externe. Pour le présenter, il faut soit posséder une maîtrise, soit être titulaire du Capes. Si vous êtes titulaire du Capes, vous pouvez demander un report de stage auquel cas vous n'effectuez pas votre stage en IUFM / position et bénéficiez d'une année pour préparer l'agrégation (évidemment, vous n'êtes pas rémunéré durant cette année). J'insisterai sur le fait que, non seulement le programme est plus difficile que celui du capes, mais qu'en plus ces dernières années, le nombre de postes disponibles s'est considérablement réduit, ce qui en fait un concours très difficile... Il y a deux épreuves écrites: Analyse et probabilités pour l'une, mathématiques générales pour l'autre. Je ne vous détaille pas le programme: dans les grandes lignes, l'intégralité jusqu'à la maîtrise (Master 1) comprise. A l'issue de ces deux épreuves, les heureux admissibles passent trois épreuves orales: l'une en analyse, l'autre en algèbre et la troisième dépend de l'option choisie (probabilités, analyse numérique ou informatique). Les deux premières épreuves orales sont de niveau Maths sup/ maths spé (soit L2) mais la discussion peut être assez ≪ salée ≫ . La dernière épreuve fait intervenir de la modélisation: il faut alors savoir se servir de programmes informatiques (Maple, Mathlab, C... selon le choix de l'option) et on doit *modéliser* un texte qui nous est proposé (i.e. on vous donne un texte scientifique, et vous devez en tirez matière à une leçon de votre domaine d'option, modéliser la situation par l'informatique). Bref, cette dernière épreuve mérite une préparation bien spécifique (les deux premières étant plus traditionnelles).

Moralité: *Tout concours doit être préparé* (si possible dans une structure spécialisée, type IUFM ou université pour l'agrégation). Ce n'est pas uniquement pour vous guider dans ces vastes programmes, mais aussi pour vous apprendre les spécificités du concours, l'attitude que l'on attend de vous, la *norme* sur laquelle vous allez être jugé. Enfin, le travail en groupes est un facteur de motivation et d'amélioration non négligeable que vous ne pourrez pas retrouver en préparant ces concours en solitaire.

Enfin, citons la possibilité de passer d'autres concours de la fonction publique (mais sans rapport avec l'enseignement).

On signale en particulier la possibilité de passer les concours d'inspecteur des impôts (dont la partie mathématiques est la plus conséquente). Il y a deux voies: généraliste et analyste. Dans la première, il y a pour l'écrit une épreuve de culture générale et deux options (il est possible de choisir 2 fois Maths) et de la culture générale pour l'oral. Dans le concours analyste, on remplace une épreuve de maths par une épreuve d'informatique à l'écrit, et on ajoute une épreuve d'informatique pour l'oral. Si l'année de préparation au Capes de maths vous permet de (largement) couvrir le programme de mathématiques, il faudra par contre préparer l'épreuve de culture générale en solo (avec des bouquins ou dans une autre structure).

Si vous pensez pouvoir présenter un concours par voie interne ou par la troisième voie, lisez attentivement les B.O. fixant les conditions exactes pour ce concours: les informations données ici sont d'ordre général, il est impossible de lister précisément les différentes conditions de chaque concours dans ce fascicule dédié aux révisions.

Postes offerts aux différents concours:

Concours	2008	2007	2006	2005
Caplp externe Maths / Physique	192 (+ 25 Cafep)	210 (+25 Cafep)	210 (+23 Cafep)	300 (+26 Cafep)
Capes interne Maths	110	164	146	165
Capes externe Maths	806 (+155 Cafep)	952 (+160 Cafep)	952 (+160 Cafep)	1310 (+177 Cafep)
Agrégation interne	107 (+15 CAER)	107 (+20 CAER)	110 (+19 CAER)	138 (+19 CAER)
Agrégation externe Maths	252	290	290	388

Notez que le nombre de postes au concours est généralement publié peu avant les vacances de décembre (période dite de la trève des confiseurs). Aussi, devez-vous vous accepter de vous inscrire à un concours sans totalement maîtriser les possibilités offertes. Néanmoins, il vous est possible d'extrapoler les derniers chiffres.

L'incertitude sur l'avenir des concours

L'actuel président de la république vient d'annoncer (sans que nous ayons de plus amples précisions) la *masterisation* des concours d'enseignement. Celle-ci impliquerait qu'à partir de 2010, la condition pour passer les concours de recrutements serait changée: seuls les étudiants inscrits (ou possédant?) un master (dans la seconde année a priori) pourraient présenter ces concours. Pour l'heure, nous n'avons aucune certitude réelle....à l'exception des modalités inchangées pour le concours 2009.

1.3 Méthodes de travail

Je décris ici la méthode de travail proposé dans ce document. Il se compose de différentes sections, graduées en difficultés. Une introduction contextualise la section (son importance vis-à-vis des différents concours) et propose quelques exercices et pistes de révisions.
L'ambition étant de donner un document relativement autonome: vous trouverez des corrigés avec quelques rappels de cours. Pour réviser les cours, vous pouvez utiliser vos anciennes notes personnelles ou en obtenir sur internet. Vous trouverez sur le site web de la préparation, dans la rubrique *Liens*, de très nombreux pointeurs vers des documents téléchargeables.

`http://tice.iufm-martinique.fr/capesmaths/`

La rédaction est un point très important des concours: il faut vous habituer au plus tôt à bien rédiger. Les corrections de ce document sont donc très rédigées. *Lorsque j'utilise l'écriture en italique, ou dans des boîtes, il s'agit de commentaires relatifs à l'exercice, pour dégager une méthode ou faire des liens avec d'autres notions: ils ne font alors évidemment pas partie de la rédaction de la copie.*

Théorème 1 (*Théorème dans les corrections*)

Vous trouverez à l'intérieur d'une solution des théorèmes ainsi présentés. Je les cite afin que vous puissiez aisément les retrouver, mais il n'est pas nécessaire de les écrire à l'identique dans une copie.

La bonne rédaction consiste à vérifier les conditions du théorème, de citer son nom puis d'écrire directement la conclusion. Donnons un petit exemple:

> **Test**: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire (de coefficient dominant égal à 1) à coefficient réel et de degrè impair. On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fonction polynomiale associée, définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = P(x)$. Montrer que toute fonction polynomiale f s'annule au moins une fois dans $\mathbb{R}$.
> **Solution** P étant de unitaire et degré impaire, nous avons: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, il existe a et b deux réels avec $a < b$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. La fonction f étant une fonction polynomiale, elle est continue (par théorème sur les opérations algébriques sur les fonctions continues) sur l'intervalle $[a; b]$. Nous déduisons par le théorème des valeurs intermédiaires l'existence d'un $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$.

Nous avons ici cité deux théorèmes: le théorème sur les opérations algébriques sur les fonctions continues *(je sur-rédige ici, il n'est pas nécessaire de le citer)* et le T.V.I. (qu'il est *nécessaire* de citer). On a préalablement vérifié les conditions du TVI (à savoir que f est continue sur un intervalle I) et que 0 est un élément de l'image de l'intervalle $I = [a; b]$ par f. On n'a pas, dans sa copie, à écrire le théorème en entier... mais dans ce document, j'ajoute le théorème afin que vous puissez le revoir plus facilement!

Théorème 2 (*Théorème des valeurs intermédiaires*)

Soit f une fonction réelle à valeurs réelles, continue sur l'intervalle I. Alors, $\forall (a, b) \in I^2$, $\forall \lambda \in]f(a); f(b)[$, $\exists c \in]a; b[$ tel que $f(c) = \lambda$.

Enfin, je cite la nomenclature que j'essaierai de conserver pour mes interventions / poly. durant l'année prochaine.

- **Test** Il s'agit d'une petite question pour vérifier que vous avez compris une notion ou pour souligner une difficulté. Vous devez répondre à un test en moins d'une minute, sans aucune rédaction (tout au brouillon). L'intérêt d'un test réside exclusivement dans la compréhension du problème posé et dans sa (courte) solution.

- **Exercice** Là, il s'agit d'une mise en pratique d'une (ou parfois plusieurs) méthode(s) classique(s) qu'il vous faut maîtriser à l'issue de cet exercice. Généralement, l'énoncé est choisi pour présenter la méthode dans un cas simple. Vous devez prendre le temps de chercher ce type d'exercice (cela ne devrait pas prendre plus de 30 minutes généralement), bien le rédiger (et vérifier lors de la correction que votre rédaction corresponde à ce qui est proposé). Si vous n'arrivez pas à résoudre un exercice, reprenez attentivement la correction. Il vous faut, au final, maîtriser ces méthodes (très classiques) avant de passer à des problèmes plus difficiles.

- **Petit problème** Il s'agit d'un long exercice, mêlant plusieurs méthodes classiques les unes après les autres. Les parties sont généralement classiques: il faut donc savoir les maîtriser. Ils sont généralement plus techniques que les exercices, mais prenez autant de temps que nécessaire pour les travailler et les rédiger au propre. Il est possible de travailler durant une heure une première partie, puis de lire sa correction et de reprendre un peu plus tard la seconde partie du problème et ainsi de suite... Le tout est d'essayer de le traîter jusqu'au bout (tout est intéressant, même les questions finales, qui font intervenir encore des méthodes classiques!).

- **Annales** Dernier type d'épreuves: les annales. Là, il vous faut, contrairement aux autres types d'épreuves, vous mettre dans les conditions du concours et donc plannifier 5h de libre et traiter au mieux le sujet dans le temps imparti, sans interruption (hormis vos pauses). Au bout de ces 5h, vous devez avoir un document au propre à remettre... Lors de la séance suivante de révision, lisez attentivement la correction, voyez où sont vos erreurs, vos difficultés, sur quels points vous avez buté, relisez éventuellement du cours si besoin, n'hésitez pas à le retravailler avec la correction. Il n'est pas utile d'aller jusqu'au bout de la correction d'une épreuve de Capes, car quasiment personne ne dépasse un certain point. Cela devient soit trop compliqué, soit infaisable en 5h... Aussi faut-il vous concentrer sur les choses réalisables le jour J et apprendre à être efficace. Votre objectif est de rendre la meilleure copie possible en 5h. Vous vous apercevrez que bon nombre de questions traitées reposent sur des automatismes que vous avez acquis en faisant les exercices et problèmes. Il vous faudra apprendre à passer sur les questions difficiles pour traiter, plus loin, des questions faisables, apprendre à persévérer sur une notion pour la maîtriser avant d'aller plus loin, etc etc...

2 Géométrie classique

La géométrie classique est très présente aux programmes des oraux du Capes. Pour l'oral 1, cela représente 30 des 80 leçons à connaître (c.f. leçons 21 à 51), donc une très grande partie. De même, cette thématique représente un très fort pourcentage des sujets d'Oral 2 (épreuve sur dossier). Aussi replongez-vous dans la géométrie classique (géométrie du triangle, Thalès, Pythagore, transformations: homothéties, rotations, translations...) durant vos révisions d'été. A peu prêt n'importe quel livre de 1er S ou de Term. S fera l'affaire! Vous pouvez aussi opter pour un petit livre (fiches de cours avec exos corrigés, annales du Bac) portant sur ces classes. C'est la partie la plus aisée à réviser par soi-même.
La géométrie classique est aussi très probable à l'écrit du Capes interne. Pour le Capes externe, c'est bien plus incertain. S'il devait y avoir une épreuve de géométrie, elle porterait plutôt sur les plus parties avancées telles que la géométrie affine et euclidienne (en lien avec les structures d'espaces vectoriels, la réduction des endomorphismes, les groupes $SO(\mathbb{R})$ et autre...).
Pour les présentes révisions, nous restons à l'humble niveau du secondaire, avec quelques problèmes du jury (posés lors de l'épreuve 2). Attention, certains de ces sujets, bien que de niveau 1er S/ T.S. sont assez ardus!

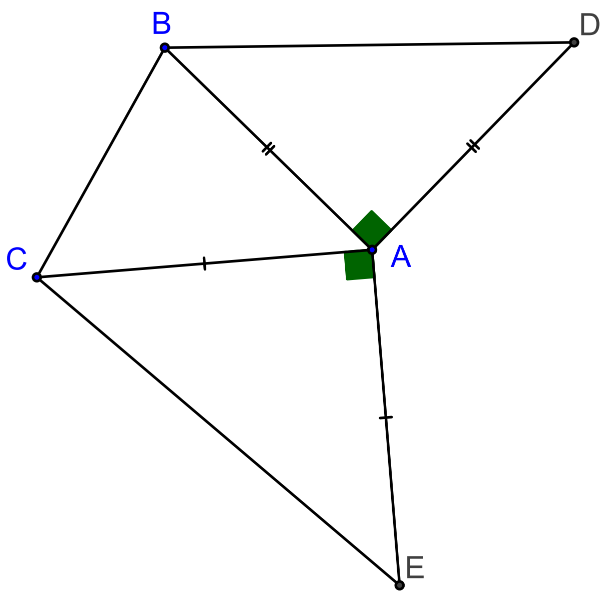
2.1 Exercice 1: Outils: Les transformations (sujet du 4/7/07)

*Débutons donc par un exemple d'Oral 2. L'épreuve (dite sur dossier) comporte une thématique (ici: Outil: les transformations), un exercice (du jury) et des questions (c.f. partie **2.**). Il y a aussi en annexes des extraits des programmes du secondaire concernant des aspects du thème proposé (non reproduit ici). Vous avez 2h de préparation pour essayer résoudre l'exercice, choisir deux ou trois exercices sur le thème donné et rédigez vos fiches relatives aux questions posées par le jury. Vos fiches seront photocopiées: l'original revient au jury, vous aurez une copie. Autant dire que, pour cette épreuve, il ne faut pas perdre de temps! Nous nous contentons dans ce travail d'été de travailler sur l'exercice du jury et dégager les savoirs et méthodes... les autres questions seront abordées lors de l'année de préparation.*
Pour pouvoir aborder cet exercice, relisez les fiches de cours de 1er S. sur les transformations.

L'exercice proposé au candidat

Le plan est orienté. Soient A, B et C trois points non alignés tels que ABC est un triangle direct. On désigne respectivement par D et E les points tels que les triangles ACE et ADB sont directs, rectangles et isocèles en A. Le point O est le milieu de $[BC]$.

Construire le point F, symétrique du point C par rapport à A. En utilisant une rotation de centre A et une homothétie de centre C, montrer que les droites (AO) et (DE) sont perpendiculaires et que $DE = 2AO$.



2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche la solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante:

Q.1) Dégager les méthodes et savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice;

Q.2) présenter une construction de la figure sur la calculatrice, puis une animation permettant d'observer la propriété établie dans l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera:

i) Sa réponse à la question Q.1)

ii) deux exercices sur le thème: **"outils: les transformations."**

2.2 Exercice 2: Problème de construction

Cet exercice est l'adaptation du sujet d'oral 2 du 16/07/07. J'ai retiré la partie portant sur la calculatrice (animation graphique pour conjecturer le résultat) ainsi que les questions du jury. Votre travail consiste en sa réslution...

On considère trois points non alignés, A, B, C. Pour tout point M de la droite (BC) on définit les droites $\Delta_1(M)$, $\Delta_2(M)$ et $\Delta_3(M)$ et les points M_1, M_2, M_3 et $I(M)$ de la manière suivante:

$\Delta_1(M)$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par M; M_1 est le projeté orthogonal de M sur (AB).
$\Delta_2(M)$ est la droite perpendiculaire à (AC) passant par M_1; M_2 est le projeté orthogonal de M_1 sur (AC).
$\Delta_3(M)$ est la droite perpendiculaire à (BC) passant par M_2; M_3 est le projeté orthogonal de M_2 sur (BC).
$I(M)$ est le point d'intersection de $\Delta_1(M)$ et de $\Delta_3(M)$.
Le but de l'exercice est de construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de (BC) tels que $M_3 = M$.

1. On suppose dans cette question que le triangle ABC est rectangle. Montrer que la position de M_3 est indépendante de M et conclure sur l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. On suppose dans cette question que le triangle ANC n'est pas rectangle.
a) Soient deux points distincts M et N de (BC). Montrer que $I(M)$ est l'image de $I(N)$ par une homothétie de centre A. En déduire que, dans M décrit la droite (BC), le point $I(M)$ est sur une droite fixe Δ passant par A.
b. Montrer que le point J intersection de Δ et (BC) est un élément de E.
c. Construire l'ensemble $\mathcal{E}$.

2.3 Exercice 3: Point de Gergonne

Cet exercice vous fait réviser la notion de barycentre ainsi que celle de coordonnées barycentriques. Il permet de passer de la géométrie classique à la géométrie affine...

Soit ABC un triangle non plat et A', B' et C' trois points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, disctincts des sommets du triangle.

Soit $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma$ et γ' les réels tels que

$$A' = bar((B,\alpha),(C,\alpha')); \quad B' = bar((C;\beta),(A;\beta')); \quad C' = bar((A;\gamma);(B;\gamma'))$$

1. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$.

2. On suppose à présent que A', B' et C' sont les points de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec les côtés du triangle.

Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes (le point de concours étant appelé point de Gergonne du triangle).

Calculer les coordonnées barycentriques de ce point par rapport au repère ABC en fonction des longueurs $a = [BC]$, $b = [AC]$ et $c = [AB]$.

2.4 Solution de l'exercice 1: Outils: Les transformations

Résolution de l'exercice du Jury

Exercice ne posant pas de grandes difficultés: juste faire attention à l'orientation des angles, mais en se laissant guider par la figure, cela se passe bien.

Considérons la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $R(A) = A$. Le triangle ADB étant rectangle en A et direct, nous avons: $R(D) = B$. Le point F étant le symétrique de C par rapport à A, nous déduisons $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AF}) \equiv \pi \mod 2\pi$. Or, le triangle ACE est rectangle en A direct, donc $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$. En utilisant la relation de Chalses, nous obtenons alors:

$$(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AF}) \equiv \pi \mod 2\pi.$$

d'où $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} \mod 2\pi$. Ainsi, obtenons-nous $R(E) = F$.
L'image de la droite (DE) par la rotation R est donc la droite (BF). La rotation étant d'angle $\pi/2$, nous déduisons que les deux droites (DE) et (BF) sont perpendiculaires.

Considérons à présent l'homothétie h de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$. O étant le milieu de $[BC]$, nous avons $h(B) = O$ et A étant le milieu de $[CF]$, $h(F) = A$. Cette homothétie transforme donc la droite (BF) en la droite (AO). Or, l'image par une homothétie d'une droite est une droite qui lui est paralléle. Nous déduisons donc que $(AO)//(BF)$ et comme (DE) et (BF) sont deux droites perpendiculaires, il en résulte que (AO) et

(DE) sont des droites parallèles.

Pour obtenir $DE = 2AO$, il suffit de remarquer que $DE = BF$ car la rotation R conserve les distances. Or, $h(BF) = OA$ (image par l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$) donc $OA = \frac{1}{2}BF$. Il s'ensuit que $OA = \frac{1}{2}BF$ d'où la conclusion.

Méthodes et savoirs (question Q.1.)

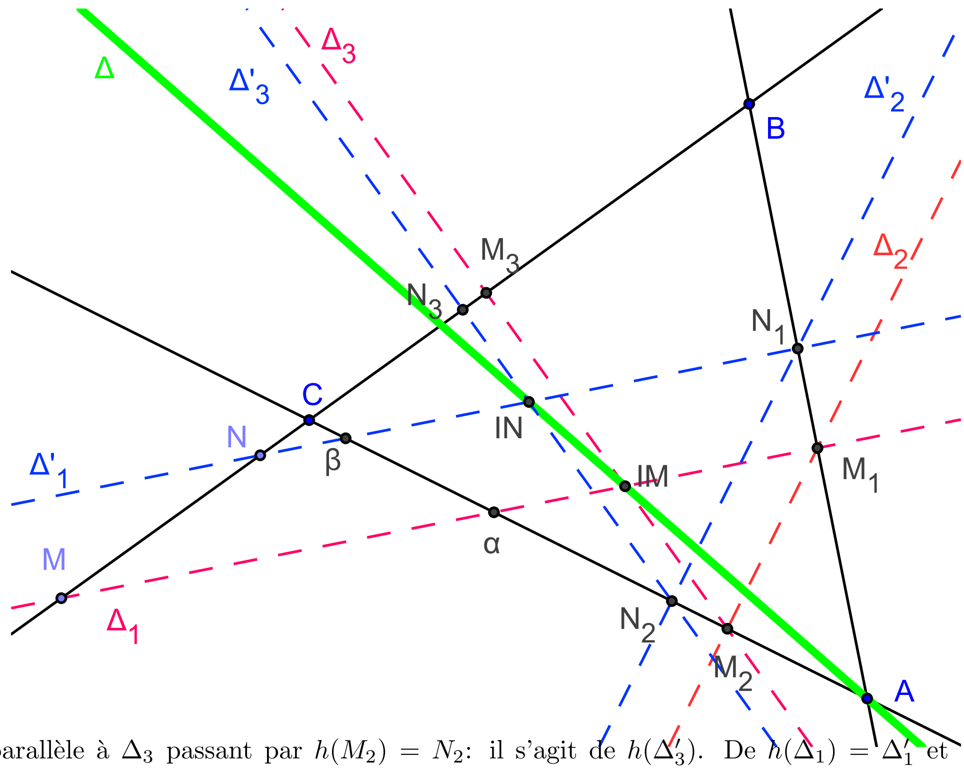
Savoir: L'image par une rotation d'une droite $\mathcal{D}$ est une droite $\mathcal{D}'$ telle que l'angle entre les deux droites soit égal à l'angle de la rotation.
Savoir: Si F est l'image de C par la symétrie de centre A, alors A est le milieu de $[CF]$.
Savoir: Si $A \in]CF[$ alors $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AF}) = \pi \mod 2\pi$.
Savoir: Une rotation conserve les longueurs; une homothétie de rapport k les multiplie par k.
Savoir: L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
Méthode: Savoir déterminer les images de certains points par une rotation / une homothétie en utilisant les propriétés de la figure.
Savoir: Deux droites perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles entres elles.

2.5 Solution de l'exercice 2: Problème de construction

1. Le triangle ABC est supposé rectangle.
Supposons qu'il est rectangle en A: alors $\Delta_1(M)$ est parallèle à (AC). De l'alignement des points A, B, M_1, nous déduisons que $\Delta_2(M) = (AB)$. Ainsi $M_2 = A$ (indépendemment du choix du point M sur (BC). Il s'ensuit que le point M_3 est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, quelque soit le point $M \in (BC)$.
Supposons à présent le triangle rectangle en B: alors $\Delta_1 = (BC)$ et il s'ensuit que $\forall M \in (BC)$, $M_1 = B$. Ainsi, la position de M_3 ne dépendra pas du choix de M sur (BC).
Enfin, supposons le triangle rectangle en C. Alors soit M_1 le projeté orthogonal de M sur (AB). M_2 le projeté orthogonal de M_1 sur (AC), donc $M_2 \in (AC)$. Enfin, M_3 est le projeté orthogonal de M_2 sur (BC): or, $M_3 \in (AC)$ qui est une droite perpendiculaire à (AC), d'où $M_3 = C$, indépendamment du choix de M sur (BC).
Nous avons donc démontré dans tous les cas que le point M_3 est indépendant du choix de M sur le droite (BC).

2.a.

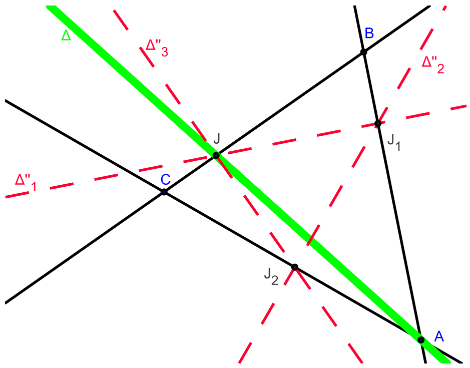
Notons α l'intersection de Δ_1 avec (AC) et β l'intersection de Δ_1' avec (AC).
Les points A, M_1 et N_1 étant alignés, il existe une homothétie h de centre A et de rapport k telle que $h(M_1) = N_1$.
Considérons alors les triangles AM_1M_2 et AN_1N_2. Puisque $(M_1M_2)//(N_1N_2)$, nous déduisons que $h(M_2) = N_2$.
Enfin, considérons les triangles $AM_1M\alpha$ et $AN_1\beta$. Les droites $(M_1\alpha)$ et $(M_2\beta)$ étant parallèles (par construction, il s'agit des droites $(\Delta_1$ et $\Delta_1')$, nous déduisons que $h(\alpha) = \beta$. Ainsi, $h(\Delta_1) = \Delta_1'$.



A présent, considérons Δ_3. Nous avons $M_2 \in \Delta_3$ donc $h(\Delta_3)$ est une droite parallèle à Δ_3 passant par $h(M_2) = N_2$: il s'agit de $h(\Delta_3')$. De $h(\Delta_1) = \Delta_1'$ et $h(\Delta_3) = \Delta_3'$ nous déduisons que $h(\Delta_1 \cap \Delta_3) = \Delta_1' \cap \Delta_3'$, soit $h(I(M)) = I(N)$. Ainsi, (une homothétie étant une bijection), $I(M)$ est l'image de $I(N)$ par une homothétie de centre A, ce qui signifie que les points $A, I(N)$ et $I(M)$ sont alignés.

A présent, supposons N fixe: lorsque M parcourt la droite (BC), $I(M)$ est sur la droite $(AI(N)) = \Delta$.

2.b. Considérons $J = \Delta \cap (BC)$. Alors $I(J)$ sera un point de Δ par la question précédente. Par définition, $I(J) = \Delta''_1 \cap \Delta''_3$ d'où $I(J) = \Delta \cap \Delta''_1$. Il s'ensuit alors que $I(J) = J$. Le point J_3 étant l'intersection de $(J_2I(J))$ avec (BC), nous déduisons $M_3 = I(J) = M$. Ainsi, $J \in \mathcal{E}$.
2.c. Soit $M \in \mathcal{E}$: ainsi, $M = M_3$. Le point $I(M) = \Delta_1(M) \cap \Delta_3(M)$. Or, $M \in \Delta_1(M)$ et $M \in \Delta_3(M)$. Ces deux droites n'étant pas parallèles (sinon le triangle ABC serait rectangle), nous avons $I(M) = M$, et donc puisque $I(M) \in \Delta$, nous déduisons que $I(M) \in \Delta \cap (BC)$. Il s'ensuit que $\mathcal{E} = \{J\}$.



Complément: Méthodes et savoirs mis en jeu dans la résolution de cet exercice
Cet exercice utilise les propriétés des homothéties.
Savoir: Si A, B, C sont trois points deux à deux différents et alignés, il existe une unique homothétie h de centre A telle que $h(A) = B$.
Savoir: Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés.
Savoir: L'image par une homothétie d'une droite est une droite qui lui est parallèle.
Méthode: Déterminer l'image d'un point par une homothétie en connaissant l'image d'un autre point.
Savoir: L'image par une homothétie de l'intersection de deux droites est l'intersection des images des deux droites par l'homothétie.
Méthode: Etant donné le centre de l'homothétie, un point $I(M)$ et un autre point $I(N)$, utiliser les deux savoirs précédents pour prouver que $I(N)$ est l'image par une homothétie donnée de $I(M)$.
Méthode: Savoir démontrer l'égalité entre deux ensembles (méthode de la double inclusion). *Nous avions conjecturé sur la calculatrice que $\mathcal{E}$ est réduit à un singleton, puis que $\{J\} \subset \mathcal{E}$; il reste donc à démontrer dans 3b. que $\mathcal{E} \subset \{J\}$.*
On peut aussi pour cette question citer la méthode d'Analyse-Synthèse (nous avons raisonné par condition nécessaire, à partir de $M = M_3$).

Note: *Les savoirs mis en jeu sont ceux entrant dans la résolution de l'exercice. Par exemple, le fait de savoir tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point donné ne rentre pas à proprement parler dans la résolution (même si ce savoir est indispensable pour pouvoir traiter l'exercice).*

2.6 Solution de l'exercice 3: Point de Gergonne

1. Le triangle ABC étant non plat, nous en déduisons que $\{A, B, C\}$ est un repère barycentrique du plan $\mathcal{P}$.
Supposons que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en G. Alors, G est barycentre de A et A', c'est-à-dire qu'il existe des réels x et y tels que $G = bar((A, x); (A', y))$. Nous pouvons toujours considérer $y = 1$, et en utilisant la formule d'associativité du barycentre, nous en déduisons $G = bar((A; x); (B; \alpha); (C; \alpha'))$.
De même, il existe des réels y et z tels que $G = bar((A; \beta'); (B; y); (C; \beta))$ et $G = bar((A; \gamma); (B; \gamma'); (C; z))$.
Ces coefficients sont proportionnels entre eux, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes, k et k', telles que: $(x, \alpha, \alpha') = k(\beta', y, \beta)$ et $(x, \alpha, \alpha') = k'(\gamma, \gamma', z)$. On en déduit alors: $\alpha' = k\beta$, soit $k = \frac{\beta}{\alpha'}$ et $k' = \frac{\alpha}{\gamma'}$. Nous en déduisons alors: $x = \frac{\beta\beta'}{\alpha'} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma'}$. Ainsi en déduisons-nous la relation: $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$.
Réciproquement, supposons cette relation vraie. Alors, les barycentres $bar((A; \frac{\alpha\gamma}{\gamma'}); (B; \alpha); (C; \alpha'))$, $bar((A; \beta'); (B; \frac{\alpha\beta}{\alpha'}); (C; \beta))$ et $bar((A; \gamma); (B; \gamma'); (C; \frac{\beta\gamma}{\beta'}))$ sont confondus.
Il s'ensuit alors que, par associativité du barycentre, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
2. Puisque les droites (AB) et (AC) sont tangentes au cercle $\mathcal{C}$ inscrit dans ABC de centre O en respectivement C' et B', nous en déduisons que les triangles $OC'A$ et $OB'A$ sont rectangles. Par Pythagore, nous obtenons: $AC' = AB' = a_1$. De même, nous montrons que $CA' = CB' = c_1$ et $BA' = BC' = b_1$.
De la relation $c_1\overrightarrow{A'B} + b_1\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{0}$, nous déduisons $A' = bar((B; c_1); (C; b_1))$. On en déduit alors: $\alpha = c_1$ et $\alpha' = b_1$.
En réitérant ce raisonnement sur les points B' et C', nous en déduisons $\beta = a_1$, $\beta' = c_1$, $\gamma = b_1$ et $\gamma' = a_1$. Ainsi, nous vérifions bien la condition $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$ d'où nous en déduisons que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes. Par 1, G est le barycentre de (A, b_1c_1), (B, c_1a_1) et $(C; a_1b_1)$. Aussi devons-nous calculer les coefficients en fonction des longueurs a, b et c des côtés. Nous avons (faire dessin): $a = b_1 + c_1$, $b = c_1 + a_1$ et $c = a_1 + b_1$. Nous obtenons $a_1 = \frac{-a+b+c}{2}$, $b_1 = \frac{a-b+c}{2}$ et $c_1 = \frac{a+b-c}{2}$.
Ainsi, $G = bar((A; (a - b + c)(a + b - c)); (B; (-a + b + c)(a + b - c); (C; (-a + b + c)(a - b + c))$.

3 $\mathcal{P}$robabilités

Les probabilités sont présentes à la fois aux programmes de l'oral et de l'écrit du Capes. Pour l'oral 1, cela concerne les leçons 3 à 8. Les notions de probabilités du programme d'écrit sont celles généralement vues en L1 et L2 (notez aussi qu'il y a un peu de statistiques au programme). Il est tout à fait possible d'avoir un sujet de probabilité à l'un des écrits, même s'il est fort probable qu'il mêle à la fois probabilité et analyse réel (étude de suites, convergence d'intégrales, étude des cas selon la valeur d'un paramètre... voir le petit problème plus loin). Une particularité du Capes Agricole: bien que le programme de l'écrit soit identique à celui du Capes externe, le poids des probabilités et statistiques est bien plus important (i.e. vous avez de fortes chances d'avoir des probas/stats à l'une au moins de vos épreuves, sinon deux (parmi les 4)).
Pour ces révisions en probabilités, nous débutons par un exercice du Bac (utiles pour l'oral 2) puis proposons un problème plus difficile, entre probabilités et analyse...

3.1 Exercice 1: Exercice du Bac

Nous débutons ces révisions par un long exercice posé lors d'un Bac S (sur 5 points). A priori, rien de difficile, mais n'hésitez pas à réviser vos cours de terminale sur ce domaine.

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.
Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments KI et K2.
L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$;

- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

Partie A

1. Soit une particule au hasard.

   Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   A1: ≪ la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 ≫ ,

   A2 : ≪ la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 ≫ ,

   B1 : ≪ la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 ≫ ,

   B2 : ≪ la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 ≫ ,

   C1 : ≪ la particule entre dans K1 ≫ ,

   C2 : ≪ la particule entre dans K2 ≫ .

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.

   Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75% et 25% restent constantes.

   Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : ≪ il y a exactement deux particules dans K2 ≫ .

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.

La demi-vie [1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?

[1] temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

3.2 Petit problème de probabilités

Un texte assez typique de ce qu'il est possible de faire entre analyse et probabilités. Au programme, étude de séries, dérivation, convergence... Ce texte est assez court et un peu technique quant à certaines manipulations. Prenez votre temps!

Résumé de cours *Quelques éléments de cours utiles pour résoudre ce problème.*
Une *variable aléatoire* est une fonction définie depuis l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire (noté Ω), vers l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. On doit pouvoir déterminer la probabilité qu'elle prenne une valeur réelle donnée ou qu'elle prenne une valeur dans un intervalle donné.
Considérons X une variable aléatoire à valeur entière ($X : \Omega \to \mathbb{Z}$).
L'espérance de la variable aléatoire X est définie comme $E(X) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kP(X = k)$. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités.
La *variance* de X est définie par $Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$.

Une *épreuve de Bernoulli* de paramètre $p \in [0; 1[$ est une expérience aléatoire ayant deux issues:

- le succès (de probabilité p)
- l'échec (de probabilité $q = 1 - p$).

La *loi binomiale* de paramètres n et p est une loi de probabilité qui correspond à l'expérience suivante :

> On renouvelle n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p On compte alors le nombre de succès obtenus à l'issue des n épreuves et on appelle X la variable aléatoire correspondant à ce nombre de succès.

L'univers $X(\Omega)$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n.
La variable aléatoire suit alors une loi de probabilité définie par :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On dispose d'une urne qui contient des boules numérotées de 1 à N ,N étant un entier naturel non nul.

On y effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée avant de procéder au tirage suivant. On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages nécessaires pour voir pour la première fois toutes les boules de l'urne.

1. Calcul de la somme d'une série

On considère un entier $n \geqslant 1$et la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Donner l'expression de $S_n(x)$ et en déduire la valeur de la somme :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

On rappelle que:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

2. On suppose que l'urne contient 2 boules (N=2)

1. Montrer que la probabilité d'avoir effectué n tirages pour voir pour la première fois les deux boules de l'urne, est donnée par : pour $n \geqslant 2 \quad p\left[X=n\right] = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
2. Vérifier que la variable aléatoire $Y = X - 1$ suit une loi géométrique. Quel en est son paramètre ? Donner la valeur de l'espérance et de la variance deY. En déduire l'espérance et la variance de X.

3. On suppose que l'urne contient 3 boules (N=3).

On note A_n (respectivement B_n ,C_n) l'événement:"la boule A (respectivement la boule B, la boule C) n'a pas été obtenue au cours des n tirages, $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

1. Déterminer les probabilités suivantes :
$$p\left[A_n\right], \quad p\left[A_n \cap B_n\right], \quad p\left[A_n \cap B_n \cap C_n\right]$$
2. Exprimer l'événement $[X > n]$ en fonction des événements A_n,B_n,C_n.
3. En utilisant la formule ci-dessous :
$$p\left[A_n \cup B_n \cup C_n\right] = p\left[A_n\right] + p\left[B_n\right] + p\left[C_n\right] - p\left[A_n \cap B_n\right] - p\left[B_n \cap C_n\right] - p\left[A_n \cap C_n\right] + p\left[A_n \cap B_n \cap C_n\right]$$
Prouver que pour tout $n \geqslant 2$:
$$p\left[X > n\right] = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
4. En déduire que la loi de X est donnée par : pour tout $n \geqslant 3 \quad p\left[X=n\right] = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$
5. Vérifier que :
$$\sum_{n=3}^{+\infty} p\left[X=n\right] = 1$$
6. Montrer que X admet une espérance et déterminer cette espérance.

3.3 Solution de l'exercice 1: Exercice du Bac

Partie A

Des paramètres de l'énoncé, nous déduisons les probabilités suivantes:
- Soit A l'évènement : être une particule du type A ; $p(\mathrm{A}) = 0{,}75$.
- Soit B l'évènement : être une particule du type B ; $p(\mathrm{B}) = 0{,}25$.

> Soient A et B deux évènements, tels que l'évènement B soit de probabilité non nulle. La probabilité conditionnelle que l'évènement A, sachant que l'évènement B est réalisé, est le nombre noté $P(A|B)$ (ou encore $p_B(A)$) défini par :
> $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Nous avons alors, d'après l'énoncé: $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K1}) = \dfrac{1}{3}$, $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K2}) = \dfrac{2}{3}$; et $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K1}) = \dfrac{1}{2}$, $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K2}) = \dfrac{1}{2}$.

Pour calculer les probabilités des évènements demandés, il suffit d'appliquer la formule donnant la probabilité conditionnelle.

1. $p(\mathrm{A1}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{K1}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K1}) \times p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$;
$p(\mathrm{A2}) = p(\mathrm{A} \cap \mathrm{K2}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{K2}) \times p(\mathrm{A}) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$;
$p(\mathrm{B1}) = p(\mathrm{B} \cap \mathrm{K1}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K1}) \times p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$;
$p(\mathrm{B2}) = p(\mathrm{B} \cap \mathrm{K2}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{K2}) \times p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$;
$p(\mathrm{C1}) = p[(\mathrm{A} \cap \mathrm{K1}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{K1})] = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{8}$;
$p(\mathrm{C2}) = p[(\mathrm{A} \cap \mathrm{K2}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{K2})] = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{8}$;

2. Cette expérience consiste à répéter, de manière indépendante, une expérience aléatoire ayant deux issues possibles: la réussite (la particule projetée atteind la boite K2) et l'échec (la particule projetée atteind la boite K1). Nous reconnaissons alors dans cette expérience aléatoire un schéma de Bernouilli de paramètre $p = P(C_2) = \frac{5}{8}$, répétée $n = 5$ fois. Soit E l'évènement « il y a exactement deux particules dans K2 ». Nous avons alors: $p(\mathrm{E}) = \binom{5}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^3 \approx 0,206$. *Pour dénombrer, on peut procéder de la façon suivante: il y a $\binom{5}{2}$ façons possibles de choisir 2 particules parmi 5, puis la probabilité d'envoyer ces deux particules dans K2 est $p^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2$, et la probabilité d'envoyer les trois autres particules dans K1 est* $(1-p)^3 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$.

Partie B

1. A l'instant initial $t = 0$, la proportion de particules A dans le gaz est de $p(0) = 0,75$, et au bout de 5730 ans la proportion n'est plus que la moitiée, soit $0,375$. Ainsi obtenons-nous:
$0,375 = 0,75\mathrm{e}^{-5730\lambda} \iff \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-5730\lambda} \iff -5730\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 0,00012$ à 10^{-5} près par défaut.

2. On cherche le temps t au bout duquel il ne reste plus que 90 % de particules soit $0,75\mathrm{e}^{-0,00012t} \approx 0,9 \times 0,75 \iff \mathrm{e}^{-0,00012t} \approx 0,9 \iff -0,00012t \approx \ln(0,9) \iff t \approx \frac{\ln 0,9}{-0,00012} \approx 878$ ans.

3. S'il y a autant de particules de type A que de type B, la proportion de particules de type A dans le gaz sera de 50 % :
Ainsi $0,75\mathrm{e}^{-0,00012t} \approx 0,5 \iff \mathrm{e}^{-0,00012t} \approx \frac{0,5}{0,75} \iff -0,00012t \approx \ln\frac{2}{3} = \iff$
$t \approx \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{0,00012} \approx 3379$ ans.

3.4 Solution du problème de probabilités

1) Nous reconnaissons dans cette expression la somme d'une suite géométrique de premier terme $x^0 = 1$ et de raison x. Nous avons donc $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Quand n tend vers $+\infty$, x^{n+1} tend vers 0 (car $x \in [0;1[$). Ainsi, nous obtenons par passage à la limite: $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

2.1) L'événement « voir pour la première fois les 2 boules de l'urne » est la réunions des 2 événements (disjoints) « tirer $n-1$ fois la boule 1 puis une fois la boule 2 » et de « tirer $n-1$ fois la boule 2 et une fois la boule 1 ».
Ainsi la probabilité est: $P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

2) Soit k un entier naturel. $P(Y = k) = P(X-1 = k) = P(X = k+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Nous reconnaissons alors la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
Ainsi (*en utilisant les formules du cours*) nous obtenons: $E(Y) = \frac{1}{p} = 2$ et $V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = 2$.

Il est intéressant de savoir retrouver ces deux formules (dans le cas général). Supposons que X soit une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p (et notons comme de coutume $1-p = q$). Ainsi, $P(X = n) = pq^{k-1}$ et $E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(Y = k) = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1}$. Nous reconnaissons alors sous le signe somme la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.
Partons de la première question: $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ étant dérivable sur $[0;1[$ nous déduisons que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ (cette expression nous est rappelée dans l'énoncé). En prenant $x = q \in [0;1[$, nous obtenons alors: $E(X) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$. Pour retrouver la formule de la variance, nous utilisons l'expression suivante: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
Or, $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 pq^{k-1}$. Il faut ici utiliser une astuce: $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1}pq^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} pq^{k-1}$. Le second terme est l'espérance de la variable aléatoire X. Pour le premier terme, nous reconnaissons (à un facteur près), la dérivée seconde le la fonction $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ (définie sur $[0;1[$). Nous avons en effet: $S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $S''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} =$

$\frac{2}{(1-x)^3}$.
En utilisant cette relation dans l'expression de $E(X^2)$, nous obtenons finalement: $E(X^2) = \frac{pq}{(1-q)^3} + E(X) = \frac{2q+p}{p^2}$. Enfin, en reportant cette expression dans le calcul de la variance, nous obtenons:

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2q+p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q+p}{p^2} - \frac{p+q}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

On en déduit alors, par linéarité de l'espérance, que $E(X) = E(Y+1) = E(Y)+1 = 3$ et $V(X) = V(Y+1) = V(Y) = 2$.

3.1) Si nous n'avons pas obtenu la boule A au cours de n tirages, c'est que nous avons tiré uniquement les boules B et C, d'où $P(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
L'évènement $A_n \cap B_n$ correspond à n'avoir tiré, durant les n premiers tirages, que des boules C. Ainsi, $P(A_n \cap B_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Nous avons bien sûr: $P(A_n \cap B_n \cap C_n) = 0$.

3.2) *Rappelons que X désigne la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages nécessaires pour voir la première fois toutes les boules (c.f. début d'énoncé).* Ainsi, $[X > n]$ signifie que l'on a pas vu toutes les boules sur les n premiers tirages. Puisqu'il n'y a que trois boules, nous avons tiré uniquement durant ces n premiers tirages: soit que des boules A (évènement $B_n \cup C_n$), soit que des boules B (évènement $A_n \cap C_n$), soit que des boules C (évènement $A_n \cup B_n$), soit que des boules A et B (évènement C_n), soit que des boules A et C (évènement B_n), soit que des boules B et C (évènement A_n).
Ainsi nous en déduisons: $[X > n] = A_n \cup B_n \cup C_n \cup (A_n \cap B_n) \cup (A_n \cap C_n) \cup (B_n \cap C_n) = A_n \cup B_n \cup C_n$.

3.3) Avec la formule donnée, nous avons :
$P(X > n) = P(A_n \cup B_n \cup C_n) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 0 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

3.4) $P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n) = (3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}) - (3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1})$
$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

3.5) $\sum_{n=3}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Nous reconnaissons les sommes de suites géométriques: la première de premier terme $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ et, en effectuant un changement d'indice, de raison $\frac{2}{3}$. La seconde serait de premier terme $\frac{1}{3^2}$ et de raison $\frac{1}{3}$.

Nous obtenons finalement: $\sum_{n=3}^{+\infty} P(X = n) == \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-2/3} - \frac{2}{9} \times \frac{1}{1-1/3} = 1$.

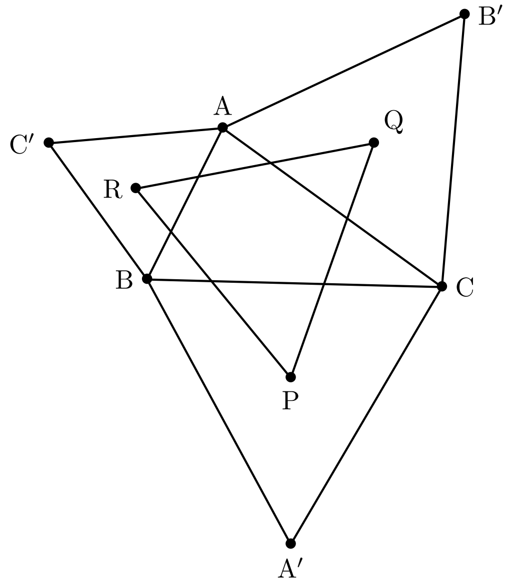
3.6) $E(X) = \sum_{n=3}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2$
$= \frac{1}{(1-2/3)^2} + 1 - \frac{2}{(1-1/3)^2} = \frac{11}{2}$.

4 $\mathcal{G}$éométrie complexe

J'ai mis à part la géométrie complexe de la géométrie classique car c'est un thème que vous pouvez approfondir et qui permet d'aborder d'autres notions (groupe par exemple). C'est un thème qui revient très (très) souvent au Caplp Maths / Sciences Physiques et que vous devez donc travailler plus spécifiquement si vous envisagez de vous présenter à ce concours. Il est aussi envisageable qu'une épreuve du Capes externe (comme de l'interne) porte sur ce type de géométrie, en lien avec des concepts algèbriques par exemple.
Vous trouverez ici un exercice du bac ainsi que deux petits problèmes, l'un provenant d'un Caplp, et l'autre sur un thème classique, vous permettant d'aborder de très nombreuses notions présentes au programme du Capes.

4.1 Exercice du Bac

Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormal direct, on considère ABC un triangle direct sur lequel on construit extérieurement trois triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC'. On considère respectivement les points P, Q et R centres de gravités respectifs des triangles BCA', ACB' et ABC'.



Notons $a,\ b,\ c,\ a',\ b',\ c',\ p,\ q$ et r les affixes respectives des points A, B, C, A', B', C', P, Q et R.

1. (a) Traduire, avec les affixes des points concernés, que C' est l'image de A dans une rotation d'angle de mesure dont on précisera le centre.
   (b) Montrer que $a' + b' + c' = a + b + c$.
2. En déduire que $p + q + r = a + b + c$.
3. En déduire que les triangles ABC, $A'B'C'$ et PQR ont même centre de gravité.
4. Montrer que
$$3(q - p) = (b' - c) + (c - a') + (a - b).$$
   On admettra que, de même :
$$3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b).$$
5. Justifier les égalités suivantes :
$$a - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b' - c)\ ;\ b - a' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - a')\ ;\ c' - b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a - b).$$
6. Déduire des **questions 4.** et **5.** que le triangle PQR est équilatéral.

4.2 Problème de Caplp

La forte probabilité d'avoir un exercice (ou un problème) de géométrie complexe est une particularité du concours de Caplp de Maths/ Sciences Physiques. Cet exercice (ici un petit problème) est généralement accompagné d'exercices (ou d'un problème) d'analyse réelle ou de probabilités. Attention, ce petit problème est assez difficile... vous pouvez passer pas mal de temps dessus! Outre les notions de géométrie complexe, vous devrez ûtiliser le définition monofocale de l'hyperbole équilatère, que je vous rappelle ci-dessous:

Définition monofocale de l'hyperbole On se place dans le plan rapporté par un repère orthonormal. Soient D une droite et F un point n'appartenant pas à D. On appelle hyperbole de directrice D et de foyer F l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e \quad \text{avec } e > 1$$

où $d(M,F)$ mesure la distance du point M au point F et $d(M,D)$ mesure la distance du point M à la droite D. La constante e est appelée *excentricité* de l'hyperbole.

On se propose d'étudier une transformation ponctuelle F du plan dans lui-même qui conserve les aires et dont les restrictions à deux droites données sont des homothéties de rapports inverses. Ces propriétés permettent la construction géométrique de l'image d'un point par F. Elle permettent aussi de mettre en évidence des hyperboles qui restent invariantes par F. On désigne par f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui est associée à F lorsque l'on a muni le plan d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ permettant d'associer à tout point M de coordonnées $(x;y)$ son affixe $z = x + iy$. La fonction f est définie par:

$$f(z) = \frac{1}{4}(5z + 3i\overline{z})$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

Partie I. Etude sommaire de f (ou F)

1. Étude analytique
   Soit $z' = f(z)$ l'affixe de M', transformé de M d'affixe z. En posant $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, déterminer les coordonnées $(x';y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x;y)$ de M. En supposant des relations obtenues que $(x';y')$ est un couple donné, montrer qu'il existe un seul couple $(x;y)$ satisfaisant à ces relations. En déduire que F est bijective et déterminer F^{-1} par les relations fournissant x et y en fonction de x' et de y'.

2. Restrictions de f aux bissectrices des axes
   Soient D_1 et D_2 deux droites d'équation $y = x$ et $y = -x$. En utilisant, par exemple, les relations précédentes, montrer que les droites D_1 et D_2 sont globalement invariantes et que les restrictions de F à la droite D_1 et à la droite D_2 sont des homothéties de rapports inverses l'une de l'autre. On précisera ces homothéties.
   Déduire de ce qui précède que F n'est pas une isométrie.

3. Propriété d'invariance
   (a) Déterminer, s'ils existent, les points invariants de F.
   (b) Montrer que l'image par F d'une droite est une droite.
   (c) Montrer que l'image du milieu I d'un segment $[M_1M_2]$ est le milieu I' du segment $[M_1'M_2']$ où M_1' et M_2' sont les images respectives de M_1 et M_2.

4. Propriété de conservation des aires
   Pour cette question, on complète le repère $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ en un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}; \overrightarrow{k})$ de l'espace, ce qui permettra d'utiliser des produits vectoriels.
   (a) Soient deux points A et B d'images respectives A' et B'. Montrer que
   $$\overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}.$$
   (b) Plus généralement, si A', B' et C' désignent les images des points A, B, C, prouver que
   $$\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

(c) Conclure que l'aire du triangle $A'B'C'$ est égale à celle du triangle ABC.

5. Construction géométrique d'un point image

   (a) Soit Δ une droite coupant les deux droites D_1 et D_2 en deux points distincts. Définir une construction géométrique de l'image Δ' de Δ par F.

   (b) Soit M un point du plan qui n'appartient ni à D_1 ni à D_2. Définir une construction géométrique simple de l'image M' de M. On commencera par déterminer une droite Δ passant par M coupant les deux droites D_1 et D_2 en deux points P_1 et P_2 tels que M soit le milieu de $[P_1P_2]$.

   (c) Donner également des constructions géométriques des images de droites qui passent par O ou qui sont parallèles soit à D_1 soit à D_2.

Partie II. Etude d'hyperboles invariantes

1. Préliminaires sur certaines hyperboles du plan

   (a) Le nombre réel k étant donné différent de zéro, montrer que l'ensemble $\mathcal{H}_k$ des points de coordonnées (x, y) vérifiant $y^2 - x^2 = k$ peut être considéré comme la réunion des graphiques des deux fonctions $x \mapsto \sqrt{x^2+k}$ et $x \mapsto \sqrt{x^2+k}$.
   En supposant d'abord $k > 0$ (puis $k < 0$), dessiner l'une de ses deux courbes et en déduire l'ensemble $\mathcal{H}_k$. On précisera en particulier, pour ces courbes, les asymptotes et la position de $\mathcal{H}_k$ relativement à ses asymptotes. Prouver que $\mathcal{H}_k$ est une hyperbole.

   (b) Dans ce qui suit, on considère la courbe $\widetilde{\mathcal{H}_k}$ dont l'équation est $y = \sqrt{x^2+k}$ avec $k > 0$. Soit M_0 un point de $\widetilde{\mathcal{H}_k}$ de coordonnées $(x_0; y_0)$. Montrer que la tangente T à $\widetilde{\mathcal{H}_k}$ au point M_0 a pour pente $\frac{x_0}{y_0}$.
   En déduire que la direction de cette tangente et la direction de (OM_0) sont symétriques par rapport à D_1 ou à D_2.
   Soient P_1 et P_2 les points d'intersection de T avec D_1 et D_2 respectivement. Montrer que M_0 est le milieu de $[P_1P_2]$.

   (c) Traduire les propriétés précédentes pour un point M_0 de $\mathcal{H}_k$ lorsque $k > 0$. Que deviennent-elles lorsque $k < 0$?

   (d) Montrer que la courbe $\mathcal{H}_k$ est également l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant: $\Re e(z^2) = -k$ ou encore $\Re e(\overline{z}^2) = -k$.

2. Invariance des hyperboles

   (a) Calculer le carré de $5z + 3i\overline{z}$, puis exprimer sa partie réelle à l'aide de $\Re e(z^2)$.

   (b) En déduire que si M appartient à $\mathcal{H}_k$ alors M' son image par F appartient aussi à $\mathcal{H}_k$, autrement dit, $\mathcal{H}_k$ est invariant par F.

4.3 Petit problème: Autour du pentagone régulier

- **1. Somme des racines cinquièmes de l'unité**
  On note $\omega = \cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$ et $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

  a. Calculer la somme $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.

  b. En déduire que α et β sont solutions de l'équation (E): $X^2 + X - 1 = 0$.

  c. Déterminer α en fonction de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

  d. Résoudre l'équation (E) et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

- **2. Sur le pentagone régulier**
  Pour $i \in \{0, \cdots, 4\}$, on désigne par A_i le point d'affixe ω^i dans le plan affine muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. Soit H le point d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe $(O; \overrightarrow{u})$.

  a. Montrer que $\overline{OH} = \cos\frac{2\pi}{5}$.

  b. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre Ω d'affixe $\frac{-1}{2}$ passant par B d'affixe i. On note M et N les points d'intersections de $(\mathcal{C})$ avec l'axe $(O, \overrightarrow{u})$ (M est d'abscisse positive). Montrer que $\overline{OM} = \alpha$, $\overline{ON} = \beta$ et que H est le milieu de OM.

  c. En déduire une construction du pentagone régulier à l'aide uniquement d'une règle et d'un compas.

- **3. Constructibilité à la règle et au compas du polygône régulier à 15 côtés**

  a. Construire le triangle équilatéral dont un des sommets est le point A_0 d'affixe 1.

  b. En déduire une construction du polygône régulier à 15 cotés.

  c. Plus généralement, supposons que les polygônes réguliers à n et m côtés (respectivement notés $mathcal P(n)$ et $\mathcal{P}(m)$) soient constructibles à la règle et au compas, et que $n \wedge m = 1$. Montrer alors que le polygône régulier $\mathcal{P}(mn)$ à $n \times m$ côtés est aussi constructible à la règle est au compas.
  Indication: On montrera que l'angle $\widehat{A_0OA_1}$ du polygône $\mathcal{P}(nm)$ est constructible à la règle et au compas uniquement.

- **4. Structure de groupes**
  Montrer que l'ensemble $\mathbb{U}_5 = \{1; \omega; \omega^2; \omega^3; \omega^4\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$.

- **5. Groupe des isométries laisant invariant le pentagone régulier**
  On cherche l'ensemble des isométries laissant invariant le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$.

  a. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{I}_5$ des isométries du plan $\mathcal{P}$ laissant invariant le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un groupe pour la loi de composition et préciser le cardinal de $\mathfrak{I}_5$.

  b. Soit s_0 la symétrie par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u})$. Donner l'expression complexe de s_0 et montrer que $s_0 \in \mathfrak{I}_5$.

  c. Soit r_0 la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{2\pi}{5}$. Donner l'expression complexe de r_0 et montrer que $r_0 \in \mathfrak{I}_5$.

  d. En déduire tous les éléments de $\mathfrak{I}_5$. A quel groupe $\mathfrak{I}_5$ est il isomorphe?

4.4 Solution de l'exercice du Bac

1. (a) ABC$'$ est un triangle équilatéral. $[BC']$ est l'image de [BC] dans la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ ce qui s'écrit en notation complexe : $c' - b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a - b)$.

   (b) On obtient de même avec les deux autres triangles équilatéraux :
   $b' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - a)$ et $a' - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b - c)$.
   En ajoutant membre à membre les trois égalités précédentes, nous obtenons:
   $c' - b + b' - a + a' - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a - b + c - a + b - c) \iff a' + b' + c' - (a + b + c) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times 0 \iff a' + b' + c' - (a + b + c) = 0 \iff a' + b' + c' = a + b + c$.

2. Les points P, Q et R sont les centres de gravité ou les isobarycentres des sommets respectifs des trois triangles équilatéraux, d'où :
   $p = \dfrac{b + c + a'}{3}$, $q = \dfrac{c + a + b'}{3}$, $r = \dfrac{a + b + c'}{3}$ soit en sommant : $p+q+r = \dfrac{b + c + a' + c + a + b' + a + b + c'}{3} = \dfrac{b + c + c + a + a + b + a + b + c}{3} = \dfrac{3(a + b + c)}{3} = a + b + c$.

3. On a donc $a + b + c = a' + b' + c' = p + q + r \iff \dfrac{a + b + c}{3} = \dfrac{a' + b' + c'}{3} = \dfrac{p + q + q}{3}$. Cette double égalité se traduit géométriquement par : les triangles ABC, A$'$B$'$C$'$, PQR ont le même centre de gravité.

4. D'après la question **2.** $3p = b + c + a'$ et $3q = c + a + b'$ soit par différence
   $3(q - p) = c + a + b' - b - c - a' = (b' - c) + (c - a') + (a - b)$. De même $3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b)$.

5. A est l'image de C$'$ dans la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, se traduit par $a - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b' - c)$. De même B est l'image de C dans la rotation de centre A$'$, soit $b' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c - a')$ et d'après la question **1. a.** $c' - b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a - b)$.

6. On a admis à la question **4.** que $3(r - p) = (a - c) + (b - a') + (c' - b)$. Soit d'après la question précédente : $3(r - p) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}[(b' - c) + (c - a') + (a - b)] = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(q - p)$, ce qui signifie que R est l'image du point Q dans la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Ainsi, PQR est un triangle équilatéral.

4.5 Solution du problème de Caplp

Partie I. Etude sommaire de f (ou F)

1. Étude analytique

Soit M un point d'affixe z; notons M' son image par F, d'affixe $z' = f(z)$. Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (avec $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$). Nous avons alors:

$$z' = \frac{1}{4}(5z + 3i\overline{z}) = \frac{1}{4}(5x + 5iy + 3i(x + iy)) = \frac{1}{4}((5x + 3y) + i(3x + 5y))$$

Or, deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelle et imaginaire le sont, ce qui implique donc: $\mathfrak{Re}(z') = x' = \mathfrak{Re}(\frac{1}{4}((5x + 3y) + i(3x + 5y))) = \frac{1}{4}(5x + 3y)$ et $\mathfrak{Im}(z) = y' = \mathfrak{Im}(\frac{1}{4}((5x + 3y) + i(3x + 5y))) = \frac{1}{4}(3x + 5y)$. En raisonnant par équivalence sur ce système, nous obtenons:

$$\begin{cases} 4x' &= 5x + 3y \\ 4y' &= 3x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x' &= 25x + 15y \\ 12y' &= 9x + 15y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y &= 4x' \\ 20x' - 12y' &= 16x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' &= \frac{5x'-3y'}{4} \\ y' &= \frac{-3x'+5y'}{4} \end{cases}$$

Ainsi, tout point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ admet un unique antécédent M par F d'affixe $z = x + iy$ avec $x = \frac{1}{4}(5x' - 3y')$ et $y = \frac{1}{4}(-3x' + 5y')$. Aussi, F est-elle une bijection du plan dans lui-même.

Méthode [Démontrer qu'une fonction est une bijection]

Même si le sujet nous guide dans le moyen de démontrer que F est une bijection, il est bon de rappeler les grandes méthodes pour cela.

> *On n'insiste pas outre mesure sur le lien entre f et F: F est une application qui à un point du plan, associe un point du plan. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ lui est associée: elle est telle que si z est l'affixe de M et z' l'affixe de $F(M)$, $z' = f(z)$. Nous avons en fait démontré que f était bijective, ce qui implique la bijection de l'application F. Nous reverrons cela plus particulièrement en étudiant la structure* d'espace affine.

- Montrer en deux temps: déjà que F est injective (i.e. que si $f(z_1) = f(z_2)$ avec $z_1 = z_2$) puis qu'elle est surjective (i.e. que pour tout point M' d'affixe z', on peut trouver un point M d'affixe z véfiant $f(z) = z'$).
- Montrer que f admet une fonction inverse, c'est-à-dire exhiber une fonction g telle que $f \circ g = Id$ (ou $g \circ f = Id$). C'est la méthode ici employée, par inversion des formules donnant $(x'; y')$ en fonction de $(x; y)$.
- Dans le cas où f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de même dimension, on peut utiliser le théorème du rang pour raccourcir la démonstration. Il suffit alors de montrer que f est injective (ou surjective) pour pouvoir conclure.

Théorème 3 (*Théorème du rang*)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K}$ étant un corps commutatif, typiquement $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On suppose de plus que E est de dimension finie. Alors, pour toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, l'image de f est de dimension finie et

$$rg(f) + dim(\mathfrak{Ker}(f)) = dim(E)$$

où $rg(f)$ désigne la dimension de l'image de f $(rg(f) = dim(\mathfrak{Im}(f)))$.

2. Restrictions de f aux bissectrices des axes

Si $M \in D_1$ alors il a pour coordonnées $(x; x) \in \mathbb{R}^2$. Soit $M' = F(M)$ de coordonnées $(x'; y')$; nous avons alors: $x' = \frac{1}{4}(5x + 3x) = 2x$ et $y' = \frac{1}{4}(3x + 5x) = 2x$ et donc $M' \in D_1$. Réciproquement, si $M' \in D_1$ est de coordonnées $(x'; x')$ alors il a pour antécédent le point M de coordonnées $(x; y)$ avec $x = (5x' - 3x')/4 = x'/2$ et $y = (-3x' + 5x')/4 = x'/2$, soit $M \in D_1$. Aussi la droite D_1 est-elle globalement invariante par F et de plus, nous avons: $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$. Aussi M' est-il l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

En reprenant cette méthode pour D_2, nous obtenons que si $M(x, -x) \in D_2$ alors $F(M) = M'$ est de coordonnées $(x' = x/2; y' = y/2)$, donc $M' \in D_2$. Réciproquement, si $M'(x'; -x') \in D_2$, son antécédant par F est le point M de coordonnées $(x = 2x'; y = 2y')$. On en déduit alors que $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}$, c'est-à-dire que la restriction de F à la droite D_2 est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

La restriction de F aux droites D_1 et D_2 sont des homothéties de rapports 2 et $\frac{1}{2}$ qui ne sont pas des isométries. Ainsi, F n'est pas une isométrie.

> *Une isométrie est une transformation du plan qui conserve les longueurs; les seules homothéties qui sont aussi des isométries sont les homothéties de rapports* 1 *ou* -1.

3. Propriété d'invariance

3.a. Soit $M(x, y)$ un point invariant sous F. Ainsi, $F(M) = M$ et donc nous avons: $x = \frac{1}{4}(5x + 3y)$ et $y = \frac{1}{4}(3x + 5y)$. En résolvant ce système, nous obtenons $x = y = 0$. Ainsi, seul le point origine O est invariant par F.

Remarque 1

Différence entre invariant et globalement invariant Nous avons précédemment vu que les droites D_1 et D_2 étaient globalement invariantes *par F, c'est-à-dire que si $M \in D_1$ alors $f(M) \in D_1$. Néanmoins, les points de ces droites ne sont pas (tous) des points invariants (c'est-à-dire tels que $F(M) = M$). En analyse, on parle de* point fixe *au lieu de point invariant. Nous pouvons aussi dire (en algèbre) que D_1 et D_2 sont* stables *sous l'action de F (stable = globalement invariante).*

3.b. Pour ce faire, nous allons montrer que les images de trois points alignés sont alignés. Soient M_1, M_2 et M_3 trois points distincts d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Les points M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{M_1M_3}; \overrightarrow{M_1M_2}) = 0 \mod \pi$. Les affixes des vecteurs $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont respectivement $z_3 - z_2$ et $z_2 - z_1$: ainsi, l'égalité d'angles est équivalente à

$$arg(z_2 - z_1) - arg(z_3 - z_1) = 0 \mod \pi \iff arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = 0 \mod \pi$$

Aussi, le complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ est-il réel, et donc nous avons:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \overline{\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)}$$

A présent, montrons que les points M_1', M_2' et M_3' sont alignés. Nous avons:

$$z_1' = \frac{5z_1 + 3i\overline{z_1}}{4}; \quad z_2' = \frac{5z_2 + 3i\overline{z_2}}{4}; \quad z_3' = \frac{5z_3 + 3i\overline{z_3}}{4}$$

Comme f est une bijection, de $z_1 \neq z_3$ nous déduisons $z_1' \neq z_3'$. Ainsi:

$$\frac{z_2' - z_1'}{z_3' - z_1'} = \frac{5(z_2 - z_1) + 3i(\overline{z_2} - \overline{z_1})}{5(z_3 - z_1) + 3i(\overline{z_3} - \overline{z_1})}$$

Pour simplifier les calculs ci-dessous, nous allons employer le lemme suivant:

Lemme 1

Si a, b, c, d sont des complexes ($b \neq 0$ et $d \neq 0$) alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Démonstration: De $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad - bc = 0$. Ainsi, $\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ab+ad-ab-cb}{b(b+d)} = \frac{ad-bc}{b(b+d)} = 0$, d'où $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b}$.

De l'égalité $\frac{z_2'-z_1'}{z_3'-z_1'} = \frac{\overline{z_2'-z_1'}}{\overline{z_3'-z_1'}}$ ce qui est équivalent à $\frac{5(z_2'-z_1')}{5(z_3'-z_1')} = \frac{3i(\overline{z_2'-z_1'})}{3i(\overline{z_3'-z_1'})}$. Ainsi, nous en déduisons:

$$\frac{z_2' - z_1'}{z_3' - z_1'} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}.$$

De $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} \in \mathbb{R}$ nous déduisons que $\frac{z_2'-z_1'}{z_3'-z_1'} \in R$ et donc les points M_1', M_2' et M_3' sont alignés. L'application F conserve donc l'alignement.

On montre de même que l'application F^{-1} associée à l'application $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f^{-1}(z') = \frac{1}{4}(5z' - 3i\overline{z'})$ conserve l'alignement.

Remarque 2 (*Démonstration en notation affine*)

Nous pouvons aussi, en employant l'écriture affine, considérer l'application linéaire $\overrightarrow{F}$ associée à F. Elle associe, à tout vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe z le vecteur $\overrightarrow{w'}$ d'affixe $z' = f(z)$. $\overrightarrow{F}$ est une application linéaire $\overrightarrow{F}(\lambda_1\overrightarrow{w_1} + \lambda_2\overrightarrow{w_2}) = \lambda_1\overrightarrow{F}(\overrightarrow{w_1}) + \lambda_2\overrightarrow{F}(\overrightarrow{w_2})$. De plus, si $\overrightarrow{w}$ de coordonnées (x, y) est un vecteur de $\mathfrak{Ker}(\overrightarrow{F})$, alors $\frac{1}{4}(5x + 3y) = 0$ et $\frac{1}{4}(3x + 5y) = 0$, soit $x = y = 0$, et donc $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$, ce qui signifie que $\overrightarrow{F}$ est un endomorphisme injectif. Par le théorème du rang, nous déduisons que $\overrightarrow{F}$ est bijectif, et donc F l'est aussi. Ainsi, l'image (par $\overrightarrow{F}$ d'une droite vectorielle est une droite vectorielle, et par suite l'image par F d'une droite est une droite.

3.c. On considère I le milieu de $[M_1M_2]$ (d'affixes respectives z_1 et z_2). Ainsi, si z_I est l'affixe de I, nous avons $z_I = \frac{z_1+z_2}{2}$. Notons par M_1', M_2' et I' les images respectives des points M_1, M_2 et I par F. Leurs affixes vérifient alors:

$$z_1' = f(z_1) = \frac{1}{4}(5z_1 + 3i\overline{z_1}),\ z_2' = f(z_2) = \frac{1}{4}(5z_2 + 3i\overline{z_2}),\quad \text{et}\quad z_I' = f(z_I)$$

Ainsi, nous avons:

$$\frac{z_1'+z_2'}{2} = \frac{1}{4}\left(5\frac{z_1+z_2}{2} + 3i\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(5z_I + 3i\overline{z_I}\right)$$

Il s'ensuit que $z_I' = \frac{z_1'+z_2'}{2}$ et donc, l'image du milieu de $[M_1M_2]$ par F est le milieu de $[F(M_1)F(M_2)]$. Le point I' est donc le milieu de $[M_1'M_2']$ et l'application F conserve les milieux.

Remarque 3 (*Application affine*)

Nous venons de voir que F conserve les milieux. Une condition bien plus forte caractérise une importante classe d'applications: les applications affines. Une application est dite affine *si elle conserve les barycentres. Nous verrons durant l'année de préparation que les applications affines (les plus courantes) sont les translations (caractérisées par leur partie linéaire, qui est Id), les symétries centrales (leur partie linéaire est $-Id$), les homothéties affines (leur partie linéraire étant une homothétie vectorielle), les synétries affines (possédant au moins un point fixe et dont la partie linéaire est involutive), les projections affines (possédant au moins un point fixe et dont la partie linéaire est un projecteur), les affinités (regroupant toutes les applications précédentes) et les transvections.*

4. Propriété de conservation des aires

4.a. $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B : y_B)$ ont pour images respectives $A'(x_{A'}; y_{A'})$ et $B'(x_{B'}; y_{B'})$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA'}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont:

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} (5x_A+3y_A)/4 \\ (3x_A+5y_A)/4 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} (5x_B+3y_B)/4 \\ (3x_B+5y_B)/4 \\ 0 \end{pmatrix}.\quad \text{Ainsi } \overrightarrow{OA'}\wedge\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{A'}y_{B'} - y_{A'}x_{B'} \end{pmatrix}.$$

Or, par calcul, nous obtenons: $x_{A'}y_{B'} - y_{A'}x_{B'} = \frac{1}{16}((5x_A+3y_A)(3x_B+5y_B) - (3x_A+5y_A)(5x_B+3y_B)) = x_Ay_B - y_Ay_B$. Il s'ensuit alors que $\overrightarrow{OA'}\wedge\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$.

4.b. Soient A, B, C trois points du plan et A', B', C' leurs images respectives par F. Par antisymétrie et bilinéarité du produit vectoriel, nous avons:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'}\wedge\overrightarrow{A'C'} &= (\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OB'})\wedge\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'O}\wedge\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{OB'}\wedge\overrightarrow{A'C'}\\ &= -\overrightarrow{OA'}\wedge\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{OB'}\wedge\overrightarrow{A'C'} = -\overrightarrow{OA'}\wedge(\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OC'}) + \overrightarrow{OB'}\wedge(\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OC})\\ &= -\overrightarrow{OA'}\wedge\overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OB'}\wedge\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}\wedge\overrightarrow{OC'}.\end{aligned}$$

Or par **I.4.a** nous avons $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'}\wedge\overrightarrow{OB'}$. Ainsi obtenons-nous:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'}\wedge\overrightarrow{A'C'} &= -\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\\ &= -\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}\\ &= -\overrightarrow{OA}\wedge(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB}\wedge(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}) = -\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AC}\\ &= -\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\wedge\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

4.c. Nous savons que, $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = AB\times AC\times\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$. Soit H le projeté orthogonal de B sur $[AC]$; nous obtenons alors $BH = AB\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AH})$ et donc l'aire du triangle ABC vaut $\frac{AC\times BH}{2}$, soit $\frac{AC\times AB\times\sin(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}{2}$ ou encore $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

La résultat de la question précédente implique donc l'égalité des aires entre ABC et $A'B'C'$.

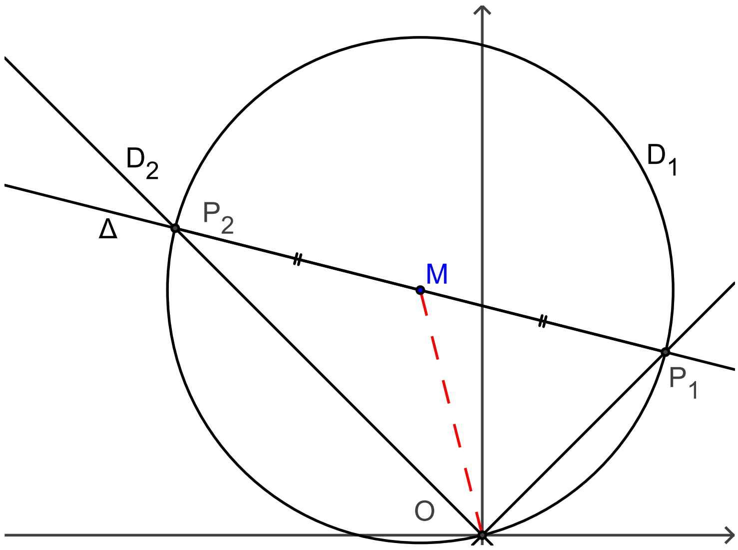
5. Construction géométrique d'un point image

5.a. Soit h_1 l'homothétie de centre O et re rapport 2 et h_2 l'homothétie de centre 0 et de rapport $1/2$. Soient M_1 et M_2 les points d'intersection de Δ avec (respectivement) D_1 et D_2. D'après la question **I.2.**, la restriction de F à D_1 coincide avec l'homothétie h_1, et sa restriction à D_2 avec l'homothétie h_2. Il s'ensuit alors que $M_1' = F(M_1) = h_1(M_1)$ et $M_2' = F(M_2) = h_2(M_2)$, d'où les égalités vectorielles:

$$\overrightarrow{OM_1'} = 2\overrightarrow{OM_1}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{OM_2'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM_2}.$$

Ainsi, M_1' est le symétrique de O par rapport à M_1 et M_2' est le milieu de $[OM_2]$. Par **I.3.b.**, l'image par F d'une droite est une droite, donc l'image par F de Δ est la droite $(M_1'M_2')$: sa construction se déduit donc de celle des points M_1' et M_2'.

5.b.



Soit M un point du plan n'appartenant ni à D_1, ni à D_2 et notons P_1 et P_2 les points d'intersection du cercle de centre M de passant par O avec les droites D_1 et D_2. Le triangle OP_1P_2 est rectangle en O car les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires. Le cercle de centre M et passant par O est donc son cercle circonscrit: le point O est donc le milieu de $[P_1P_2]$. Nous savons par **I.5.a.** que le symétrique P_1' de O par rapport à P_1 est l'image par F de P_1 et que le milieu P_2' de $[OP_2]$ est l'image de P_2 par F. Or, par **I.3.c.**, l'application F conserve les milieux: ainsi l'image de M milieu de $[P_1P_2]$ est le milieu M' de $[P_1';P_2']$. La construction des points P_1' et P_2' implique celle du point M'.

5.c. Soit D une droite passant par O. Par la question **I.3.a.**, nous savons que O est un point fixe de F donc l'image de la droite D par F contient O. Puisque l'image d'une droite (par F) est une droite, nous déduisons que $F(D)$ est une droite passant par O. Enfin, soit M un point quelconque de D: par la question précédente, nous déduisons une construction de $M' = F(M)$, et nous aurons alors $F(D) = (OM')$. Montrons à présent que F conserve le parallélisme.

Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles distinctes. On note d_1' et d_2' leurs images respectives par F et raisonnons par l'absurde en supposant que les droites d_1' et d_2' soient sécantes en un point M'. Notons alors M_1 l'antécédent de M' par F sur d_1 et M_2 son antécédant par F sur d_2. Or, par **I.1.**, l'application F est bijective ce qui implique $M_1 = M_2$: les droites d_1 et d_2 seraient sécantes, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, par absurde, nous avons prouvé que les droites d_1' et d_2' étaient strictement parallèles.

C'est une propriété assez classique des transformations usuelles du plan (rotations, homothéties, translations...). Une transformation conserve le parallélisme *si les images, par cette transformation, de deux droites parallèles, sont deux droites parallèles.*

Considérons à présent une droite D parallèle à D_1, et appelons M_2 son point d'intersection avec D_2 (ce point existe bien puisque les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles). Nous pouvons, par la méthode précédente, déterminer le point M_2' image du point M_2 par F (M_2' est le milieu de $[OM_2]$). Comme les droites D_1 et D_2 sont globalement invariantes par F et que F conserve le parallélisme, l'image par F de la droite parallèle à D_1 passant par M_2 est la droite parralèle à $F(D_1) = D_1$ et passant par M_2'. Aussi, pour construire l'image de D, il suffit de tracer la parallèle à D_1 passant par le point M_2'. Nous procédons de même pour tracer l'image d'une droite parralèle à la droite D_2.

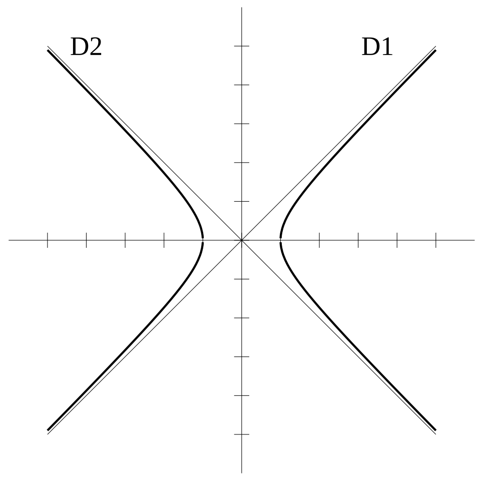
Partie II. Etude d'hyperboles invariantes

1.a. Soit k un réel non nul et $\mathcal{H}_k$ l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant $y^2 - x^2 = k$. Alors:

$$M \in \mathcal{H}_k \Leftrightarrow y^2 - x^2 = k \Leftrightarrow y^2 = x^2 + k \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{x^2+k} \\ ou \\ y = -\sqrt{x^2+k} \end{array} \right. \quad \text{(pour les } x \text{ tels que } \sqrt{x^2+k} \text{ soit définie).}$$

Ainsi, H_k est la réunion des graphes des deux fonctions $x \mapsto \sqrt{x^2+k}$ et $x \mapsto -\sqrt{x^2+k}$.

Supposons $k < 0$. Alors, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+k}$ est définie sur $\mathcal{D}$: $]-\infty; -\sqrt{-k}] \cup [\sqrt{-k}; +\infty[$. Cette fonction est continue sur $\mathcal{D}$ et dérivable sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$. Cette fonction est paire. Etudions à présent les assymptotes de cette courbe. Nous avons: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+k} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{k}{\sqrt{x^2+k}+x} = 0$ ce qui implique que la droite D_1 d'équation $y = x$ est asymptote de cette courbe en $+\infty$. Nous constatons, en étudiant le signe de $\sqrt{x^2+k} - x$ pour x suffisamment grand, que la droite est placée au-dessus de la courbe. Nous obtenons alors la courbe dans son entier par symétries par rapport aux axes des abscisses et des ordonnées.



Considérons à présent la droite d'équation $D_k : y = \frac{\sqrt{2}k}{2}$ ainsi que le point F_k de coordonnées $(0; \sqrt{2}k)$. Si M est un point appartenant à l'hyperbole de foyer F_k, de directrice D_k et d'exentricité $e = \sqrt{2}$, alors $\frac{F_kM}{d(D_k,M)} = \sqrt{2}$, soit $\frac{F_k^2M^2}{d(D_k,M)^2} = 2$. Nous obtenons alors l'équation

$x^2+y^2-2\sqrt{2k}y+2k = 2y^2-2\sqrt{2k}y+k$, qui se simplifie en $y^2-x^2=k$; ainsi, M est un point de H_k. Nous venons ainsi de montrer que tout point de l'hyperbole appartient à H_k. Réciproquement, en remontant les calculs, nous constatons que si M est un point de H_k alors M appartient à l'hyperbole équilatère de foyer $F_k(0;\sqrt{2k})$, de directrice D_k d'équation $y=\frac{\sqrt{2k}}{2}$ et d'exentricité $\sqrt{2}$.

Nous obtenons des résultats semblables pour le cas $k>0$.

1.b. Soient la courbe $\widetilde{\mathcal{H}_k}$ d'équation $y=\sqrt{x^2+k}$ avec $k>0$ et $M_0:(x_0;y_0)\in\widetilde{\mathcal{H}_k}$. Nous avons $y_0=\sqrt{x_0^2+k}$. Le coefficient directeur de la tangente en M_0 vaut $\frac{x_0}{y_0}$ (le dénominateur est non nul). La droite (OM_0) a pour coefficient directeur y_0/x_0 (pour $x\neq 0$): les pentes de ces deux droites étant inverse l'une de l'autre, nous déduisons qu'elle sont symétriques l'une de l'autre par la symétrie par rapport à D_1 (en effet, cette symétrie échange abscisses et ordonnées).

Le triangle OM_0P est isocèle en M_0 et $OM_0=M_0P_1$. De plus, D_1 étant perpendiculaire à D_2, nous en déduisons que OP_1P_2 est un triangle rectangle en O. Les angles $\widehat{P_2OM_0}$ et $\widehat{M_0P_2O}$ sont complémentaires de $\widehat{P_1OM_0}$ et M_0P_1O: aussi, sont-ils égaux. Le triangle OM_0P_2 est isocèle en M_0 et nous avons $OM_0=M_0P_2$. M_0 étant un point de (P_1P_2) vérifiant $M_0P_1=M_0P_2$, nous en déduisons qu'il est le milieu de $[P_1P_2]$.

1.c. La courbe $\mathcal{H}_k$ est la réunion de $\widehat{\mathcal{H}_k}$ et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Or, cette symétrie laisse les droites D_1 et D_2 globalement invariantes. La symétrie étant une isométrie, elle conserve les tangentes, les milieux et les angles (non orientés). Aussi les propriétés de **II.1.b** peuvent-elle être étendues à $\mathcal{H}_k$.

Soit M de coordonnées $(x;y)$ appartenant à $\mathcal{H}_k$. Alors son symétrique par rapport à D_1 est le point M' de coordonnées $(x'=y;y'=x)$, et donc $y'^2-x'^2=-k$, c'est-à-dire que $M'\in\mathcal{H}_{-k}$. Comme nous vérifions la propriété réciproque, nous en déduisons que les courbes $\mathcal{H}_k$ et $\mathcal{H}_{-k}$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite D_1. La symétrie axiale étant une isométrie, elle conserve les tangentes, les milieux et les angles (non orientés). Les propriétés établies en **II.1.c** pour $\mathcal{H}_k$ pour $k>0$ sont aussi valables pour $\mathcal{H}_k$ avec $k<0$.

1.d. Soit M d'affixe $z=x+iy$. Nous avons $z^2=(x^2-y^2)+2ixy$ et $\overline{z^2}=(x^2-y^2)-2ixy$, soit donc $\mathfrak{Re}(z^2)=\mathfrak{Re}(\overline{z^2})=x^2-y^2$. La courbe $\mathcal{H}_k$ des points M dont les coordonnées x et y vérifient $y^2-x^2=k$ est donc l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $\mathfrak{Re}(z^2)=k$.

2. Invariance des hyperboles.

2.a. Après calculs, nous obtenons: $(5z+3i\overline{z})^2=25z^2-9\overline{z}^2+30i|z|^2$. $30i|z|^2$ étant un imaginaire pur, sa partie réelle est nulle. Aussi, $\mathfrak{Re}\left((5z+3i\overline{z})^2\right)=\mathfrak{Re}(25z^2)-\mathfrak{Re}(9\overline{z^2})=\mathfrak{Re}(25z^2)-\mathfrak{Re}(9z^2)=16\mathfrak{Re}(z^2)$.

2.b. $M(z)\in\mathcal{H}_k \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z^2)=-k \Leftrightarrow 16\mathfrak{Re}(z)^2=-16k \Leftrightarrow \mathfrak{Re}\left(f(z)^2\right)=-k$. Ainsi, obtenons-nous: $M(z)\in\mathcal{H}_k\Leftrightarrow M'=f(M)\in\mathcal{H}_k$. Aussi, $\mathcal{H}_k$ est-elle globalement invariante par l'application F.

4.6 Solution du problème autour du pentagone régulier

1. On pose $\alpha=\omega+\omega^4$ et $\beta=\omega^2+\omega^3$.

1.a. Notons que $\omega=e^{2i\pi/5}$. Nous reconnaissons la somme des premiers termes d'une suite géométrique et obtenons donc: $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=\frac{1-\omega^5}{1-\omega}$. Or, $\omega^5=\left(e^{2i\pi/5}\right)^5=e^{2i\pi}=1$. Il s'ensuit que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$. *Autre méthode* Nous pouvons aussi utliser la factorisation $X^-1=(X-1)(X^4+X^3+X^2+X+1)$ appliquée à ω. Il suffit alors de remarquer que $\omega\neq 1$, ce qui permet la division par $\omega-1$.

1.b. Par 1.a. $1+\alpha+\beta=0$ donc $\alpha+\beta=-1$. Calculons le produit: $\alpha\times\beta=(\omega+\omega^4)\times(\omega^2+\omega^3)=\omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=-1$. car $\omega^5=1$. D'après les relations entre coefficients et racines, nous en déduisons que α et β sont solutions du polynôme $(X-\alpha)(X-\beta)=X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\times\beta=X^2+X-1$.

Théorème 4 (*Relation coefficients - racines*)

Si $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ est scindé, $P=a_n(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n)$ alors

$$(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}=\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_n}.$$

Note: Ce théorème est ici employé dans un cas très simple: il s'agit du fameux X^2-SX+P où S est la somme des racines et P leur produit, vus en Terminale.

1.c. $\alpha=\omega+\omega^4=e^{2i\pi/5}+e^{8i\pi/5}=e^{2i\pi/5}+e^{i(2\pi-2\pi/5}=e^{2i\pi/5}+e^{-2i\pi/5}=2\cos(\frac{2\pi}{5})$.

1.d. On calcule le discriminant de $X^2+X-1=0$: $\Delta=5$ donc ce polynôme admet deux racines réelles: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $\cos(2\pi/5)\geq 0$, nous en déduisons que $\cos(2\pi/5)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2.a. A_1 a pour affixe $e^{2i\pi/5}$ et A_4 a pour affixe $e^{-2i\pi/5}$. Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_4}$ a pour affixe $e^{-2i\pi/5} - e^{2i\pi/5} = 2i\sin(2\pi/5)$. Aussi est-il orthogonal à l'axe des abscisses $(O;\overrightarrow{u})$. Ainsi, $\overline{OH}$ est l'abscisse de A_1, d'où $\overline{OH} = \Re e(e^{2i\pi/5}) = \cos(2\pi/5)$.

2.b. L'équation du cercle $\mathcal{C}$ est $(z+\frac{1}{2})^2 = \Omega B^2$. L'équation de l'axe réel étant $\Im m(z) = 0$, nous en déduisons que les points M et N vérifient le système $(z+\frac{1}{2})^2 = \Omega B^2$ et z réel. Il s'ensuit, puisque $\Omega B^2 = \frac{1}{4}+1 = \frac{5}{4}$ que l'on recherche les réels x vérifiant $(x+\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$, soit $x^2+x-1=0$. Nous reconnaissons l'équation (E) dont α et β sont solutions. Il s'ensuit alors que $\overline{OM} = \alpha > 0$ et $\overline{ON} = \beta$.

Montrons à présent que H est le milieu de OM. Le milieu de OM a pour affixe $\alpha/2 = \frac{\omega+\omega^4}{2} = \frac{e^{2i\pi/5}+e^{-2i\pi/5}}{2} = \cos(2\pi/5)$ qui est bien l'affixe de H. Donc H est le milieu de $[O;M]$.

2.c. On trace le cercle de centre O et de rayon quelconque, que l'on considèrera ensuite comme l'unité. On trace une droite passant par O et coupant $\mathcal{C}$ en A_0. On complète en traçant la droite $\mathcal{D}'$ orthogonale à $\mathcal{D}$ passant par O. Nous obtenons ainsi un repère orthonormé, et l'on note B le point intersection de $\mathcal{C}\cap\mathcal{D}'$ tel que $(O,\overrightarrow{OA_0};\overrightarrow{OB})$ soit un repère orthonormé direct. On construit avec le compas et la règle le point H milieu de OA_0 et traçons $\mathcal{D}''$ la parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par H. Nous appelons A_1 et A_4 les intersections $\mathcal{D}''\cap\mathcal{C}$. Une fois que nous avons la distance A_0A_1, il nous est facile de la reporter, à l'aide du compas pour obtenir le point A_2 comme intersection de $\mathcal{C}$ avec le cercle de centre A_1 et de rayon A_1A_0. Nous procédons de même pour construire A_3.

3.a. Considérons donc le triangle équilatéral de sommet A_0 d'affixe 1. Notons C_1 et C_2 les deux autres sommets de ce triangle. Le triangle équilatéral $A_0C_1C_2$ étant inscrit dans le cercle de centre 0 et de rayon 1, nous déduisons que O est le centre de gravité de ce triangle, et donc il est situé au 2/3 des bissectrices. Soit I le milieu de $[C_1C_2]$. I est sur l'axe $(O\overrightarrow{x})$ et nous avons alors $A_0O = 1 = 2/3AI$ et donc I est d'affixe $\frac{-1}{2}$. Il suffit alors de tracer la parallèle à l'axe $(O\overrightarrow{y})$ passant par I: les points d'intersections de cette droite et du cercle trigonométrique sont C_1 et C_2.

3.b. Les sommets du polygône régulier à 15 côtés et dont un sommet est A_0 d'affixe 1 sont les $e^{2ik\pi/15}$ avec $k\in\{0;1;\cdots;14\}$.

Il suffit alors de remarquer que les sommets B_5 d'affixe $e^{10i\pi/15} = e^{2i\pi/3}$ et $B_6 = e^{12i\pi/15} = e^{4i\pi/5}$ sont adjacents dans le pentédécagone (polygône régulier à 15 cotés). Or, l'un appartient au triangle équilatéral que nous savons construire avec la règle et le compas et l'autre appartient au pentagone que nous savons aussi construire uniquement à l'aide d'une règle et d'un compas. Il s'ensuit, en reportant le nombre nécessaire de fois la distance B_5B_6 sur le cercle $\mathcal{C}$ que nous construisons le pentédécagone uniquement avec la règle et le compas.

Ici, c'est astucieux: nous utilisons le fait que nous sachions construire le pentagone et le triangle équilatéral uniquement à l'aide de la règle et du compas. Le raisonnement qui suit prouve que l'on peut alors construire le pantédécagone avec une règle et un compas.

3.c. Si $n\wedge m = 1$, par la relation de Bezout, il existe $(u;v)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $nu+vm = 1$. En mutipliant cette relation par $\frac{2\pi}{nm}$, nous obtenons: $\frac{2\pi}{m}u + \frac{2\pi}{n}v = \frac{2\pi}{nm}$. L'angle $\frac{2\pi}{m}$ est l'angle au centre du polygône $\mathcal{P}(n)$; ce polygône étant constructible à la règle et au compas, nous déduisons que cet angle l'est aussi. L'angle $\frac{2\pi}{n}$ est l'angle au centre du polygône $\mathcal{P}(n)$, lui aussi constructible règle et compas. En reportant u fois le premier angle et v fois le second, nous obtenons l'angle $\frac{2\pi}{nm}$ qui est l'angle au centre du polygône $\mathcal{P}(nm)$. Nous obtenons donc un premier sommet (autre que A_0) à l'aide uniquement de la règle et du compas, et par suite, ce polygône est constructible à la règle et au compas.

4. On vérifie par exemple que ω est telle que $\omega^5 = 1$ et nous en déduisons alors qu'il s'agit du sous-groupe cyclique de $(\mathbb{C}^*,\times)$ engendré par ω.

Comme souvent, on ne montre pas directement qu'il s'agit d'un groupe mais d'un sous-groupe d'un groupe connu: ici le groupe (pour la loi de composition) des bijections du plan (les isométries sont des bijections).

5.a. Nous allons montrer que l'ensemble des isométries est un sous-groupe du groupe des bijections du plan (muni de la loi de composition). Déjà, l'identité est une isométrie laissant invariant le pentagone, donc $id\in\mathfrak{I}_5$. Ensuite, si u et v sont des isométries conservant le pentagone, alors $u\circ v$ est une isométrie qui le conserve. Enfin, montrons que si u conserve le pentagone régulier, alors u^{-1} le conserve aussi. L'image par u de tous sommets du pentagone est un sommet, donc u^{-1} envoie les sommets du pentagone sur les sommets. Comme u^{-1} conserve les barycentres, il s'ensuit que u^{-1} laisse fixe le pentagone.

Une isométrie conserve le barycentre: le polygône étant convexe, son image l'est aussi. Dire que les sommets sont envoyés sur les sommets n'est pas véritablement suffisant puisque nous pourrions obtenir, par exemple, une étoile (i.e. non convexe). Néanmoins, on ne s'attarde pas ici à donner tous les détails de la démonstration.

Soit u une isométrie de $\mathfrak{I}_5$. u envoie A_0 sur un sommet: il y a donc 5 choix. u envoie A_1 sur un sommet voisin de $u(A_0)$ (car u conserve les distances): il s'ensuit qu'il y a deux choix. Ensuite, l'image des autres sommets du pentagone se déduisent de la conservation des distances.

> **Méthode** Vous avez ici reconnu le groupe dihédral à 5 éléments $\mathbb{D}_5$. Une façon de dénombrer $\mathbb{D}_n$ est de choisir un sommet quelconque u_0: il y a n choix pour son image, puis on prend un sommet voisin de u_0: il n'y alors que 2 choix pour son image (par conservation des distances par une isométrie, le voisin de u_0 ne peut être envoyé que sur l'un des deux voisins de l'image de u_0. Ensuite, tout s'ensuit sans qu'il n'y ait de choix à faire, et donc $|\mathbb{D}_n| = 2n$.

5.b. $s_0(z) = \overline{z}$ (cours). $s_0(1) = 1$ donc s_0 laisse fixe A_0. De $\overline{\omega} = \omega^4$ et $\overline{\omega^2} = \omega^3$, nous déduisons $s_0(A_1) = A_4$ et $s_0(A_2) = A_3$. Aussi, s_0 est une isométrie (réflexion) qui fixe le pentagone.

5.c. $r_0(z) = e^{2i\pi/5}z$. Nous constatons que $r_0(A_i) = A_{i+1}$ où les indices sont considérés modulo 5.

5.d. r_0 est d'ordre 5 et on remarque que $s_0 \circ r_0,\ s_0 \circ r_0^2, \cdots s_0 \circ r_0^5$ sont des antidéplacements deux à deux différents car ils ne fixent pas le même point. Il s'ensuit que nous obtenons les 10 isométries de $\mathfrak{I}_5$ (les 5 rotations venant de r_0 et ses 5 antidéplacements).

Enfin, $\mathfrak{I}_5$ est isomorphe à $\frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

5 $\mathcal{A}$lgèbre

Nous entrons à présent dans la partie représentant environ 30% du programme d'écrit du Capes. Il n'est pas possible d'en reprendre tous les points possibles d'algèbre du Capes, donc je me bornerai à simplement à deux exercices pour laisser plus de place à l'analyse.

5.1 Exercice 1: Formule de Vandermonde $\times 3$

Le but de ce (long) exercice est de donner trois démonstrations différentes de la formule de Vandermonde:

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

Partie I.

On considère deux ensembles disjoints A et B non vides, tels que $Card(A) = a$ et $Card(B) = b$. Soit E l'ensemble formé de la réunion de deux ensembles précédents (i.e. $E = A \cup B$).

1. Quel est le cardinal de E? Pour tout entier naturel n inférieur ou égal à $a + b$, combien E admet-il de sous-ensembles de cardinal n ?

2. Soit k un entier inférieur ou égal à a. Combien A admet-il de sous-ensembles de cardinal k? Combien B admet-il de sous-ensembles de cardinal $n - k$?

3. En faisant varier k de 0 à a, déduire de ce qui précède la valeur de $\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

Partie II.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

1. En utilisant la formule du binôme, développer $(1 + x)^a(1 + x)^b$ de deux manières différentes.

2. On considère deux polynômes:

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_a x^a \quad et \quad Q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_b x^b.$$

   Quel est le coefficient de x^n dans le produit $P(x)Q(x)$?

3. En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

Partie III.

Une urne contient a boules blanches et b boules noires. Soit n un entier naturel inférieur à $a + b$. On extrait au hasard une poignée de n boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité p_k que cette poignée contienne k boules blanches (pour k compris entre 1 et n)?

2. Quelle relation trouve-t-on en écrivant que la somme des probabilités trouvées à la question précédente est égale à 1?

5.2 Exercice 2: Arithmétique au Bac C

L'arithmétique fait partie du programme de spécialité du Bac S. Les élèves de ces terminales disposent d'à peu prêt tous les outils classiques de l'arithmétique, hormis la connaissance des structures (de groupe, d'anneau / d'idéaux et de corps). Il vous faut maîtriser les deux présentations (i.e. l'arithmétique vue en T.S. spécialité et celle sur dans le supérieur), puisque se sont des thèmes très classiques à la fois pour l'écrit mais aussi aux deux oraux (dans l'oral 1, vous êtes parfois obligé de passer par la vision groupe / sous-groupe du supérieur alors qu'à l'oral 2, vous devez vous limiter au programme de T.S.) Pour réviser, là encore vous pouvez commencer par les fiches de cours des livres de révisions du Bac scientifique, puis passer sur des livres de classes préparatoires pour compléter vos connaissances dessus.

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. (a) Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que
$$au + bv = 1$$
alors les nombres a et b sont premiers entre eux.
   (b) En déduire que si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\ ;\ b)$ tels que $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.
   (a) Déterminer a lorsque $a = b$.
   (b) Vérifier que $(1\ ;\ 1)$, $(2\ ;\ 3)$ et $(5\ ;\ 8)$ sont trois solutions particulières.
   (c) Montrer que si $(a\ ;\ b)$ est solution et si $a \neq b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. (a) Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est une solution différente de $(1\ ;\ 1)$ alors $(y - x\ ;\ x)$ et $(y\ ;\ y + x)$ sont aussi des solutions.
   (b) Déduire de **2. b.** trois nouvelles solutions

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
   Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $(a_n\ ;\ a_{n+1})$ est solution.
   En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

5.3 Solution à l'exercice 1: Formule de Vandermonde ×3.

Partie I.

On considère deux ensembles disjoints A et B non vides, tels que $Card(A) = a$ et $Card(B) = b$. Soit E l'ensemble formé de la réunion de deux ensembles précédents (i.e. $E = A \cup B$).

1. Les ensembles A et B étant disjoints par hypothèse, nous déduisons que $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$. Ainsi, $Card(E) = a + b$.

   Théorème 5 (*Cardinalité et union d'ensembles*)

   Nous avons la formule générale $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

   Soit n un entier naturel inférieur à $a+b$. Par définition du coefficient binomial, $\binom{a+b}{n}$ représente le nombre de sous-ensembles de taille n parmi un ensemble de taille $a+b$. Ainsi, nous déduisons que E admet $\binom{a+b}{n}$ sous-ensembles de cardinal n.

2. Nous obtenons de même:
   A admet $\binom{a}{k}$ sous-ensembles de cardinal k (avec $k \leq a$).
   B admet $\binom{b}{n-k}$ sous-ensembles de cardinal $n - k$ (avec $n - k \leq b$).

3. A tout sous-ensemble F de cardinal n de E (avec $0 \leq n \leq a + b$), nous pouvons associer un unique couple $(F \cap A; F \cap B)$ de sous-ensembles de $A \times B$. Soit k le cardinal de $F \cap A$. Alors $Card(F \cap B) = n - k$.

   Fixons-nous à présent un $k \in \{0, \cdots, a\}$ et considérons tous les ensembles F de E de taille n tels que $F \cap A = k$. Il y en a $\binom{a}{k} \times \binom{b}{n-k}$. En faisant varier k entre 0 et a, nous décrivons tous les cas possibles (puisque si F sous ensemble de E de taille n, alors $0 \leq Card(A \cap F) \leq Card(A) = a$). Ainsi avons-nous une bijection entre $\{F$ sous-ensemble de E de taille n $\}$ et $\bigcup_{k=0}^{a}\{F_A$ sous-ensemble de A de taille k $\} \times \{F_B$ sous-ensemble de B de taille $n - k$ $\}$. Les cardinaux de deux ensembles en bijections sont égaux, ce qui nous donne (dans l'union, les éléments sont deux à deux disjoints):
$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Partie II.

1. Nous avons d'une part: $(1 + x)^a \times (1 + x)^b = (1 + x)^{a+b} = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} x^k$. D'autre part:
   $(1 + x)^a \times (1 + x)^b = \left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} x^j\right) = \sum_{i=0}^{a}\sum_{j=0}^{b} \binom{a}{i}\binom{b}{j} x^{i+j} = \sum_{j=0}^{b}\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{j} x^{i+j}$.

2. Le produit des polynômes P et Q est le polynôme R de degré $a+b$. Pour n entier naturel compris entre 0 et $a+b$, le coefficient de x^n sera égal à $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$.
3. En appliquant le résultat précédent aux deux expressions du produit $(1+x)^a \times (1+x)^b$, nous obtenons:

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

Partie III.

1. Il y a $\binom{a}{k}$ façons de choisir k boules blanches parmi la poignée de n boules, et $\binom{b}{n-k}$ façons de choisir les $n-k$ boules noires de cette poignée. Il y a donc $\binom{a}{k} \times \binom{b}{n-k}$ façons de constituer une poignée de n boules contenant exactement k boules blanches et $n-k$ boules noires. Comme au total il y a $\binom{a+b}{n}$ façons d'extraire une poignée de n boules de l'urne, la probabilité recherchée est:

$$p_k = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}.$$

2. La somme des probabilités étant égale à 1, nous en déduisons que $\sum_{k=0}^{a} p_k = 1$. En multipliant par le dénominateur (qui est commun à toutes les probabilités), nous obtenons:

$$\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

5.4 Solution de l'exercice 2: Arithmétique au Bac S

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. (a) Supposons qu'il existe un diviseur commun d à a et à b. Il existe donc a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
   L'égalité $au + bv = 1$ peut s'écire $da'u + db'v = 1 \iff d(a'u + b'v) = 1$.
   Ceci montre que d divise 1, donc $d = 1$, ce qui montre que a et b sont premiers entre eux.
   (b) $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$ peut s'écrire $a \times a + b(a-b) = 1$. Avec $u = a$ et $v = b - a$, ceci montre d'après le cours que a et b sont premiers entre eux.
2. (a) Lorsque $a = b$, l'égalité s'écrit $\left(a^2 + a^2 - a^2\right)^2 = 1 \iff a^4 = 1 \iff a = 1$.
   (b) On vient de voir que $(1\ ;\ 1)$ est un couple solution.
   Si $a = 2,\ b = 3$, alors $(4 + 6 - 9)^2 = 1^2 = 1$, donc $(2\ ;\ 3)$ est un couple solution.
   Si $a = 5, b = 8$, alors $(25 + 40 - 64)^2 = 1^2 = 1$, donc $(5\ ;\ 8)$ est un couple solution..
   (c) $(a\ ;\ b)$ est solution donc $(a^2+ab-b^2)^2 = 1$ et si $a < b \iff a-b < 0$, alors $a^2-b^2 = (a+b)(a-b) < 0$ car $a+b$ somme de deux positifs est positif.
3. (a) Si $(x\ ;\ y)$ est une solution avec $xy \neq 1$ alors $\left(x^2 + xy - y^2\right)^2 = 1 \iff x^4 + x^2y^2 + y^4 + 2x^3y - 2x^2y^2 - 2xy^3 = 1$.
   Calculons $\left[(y-x)^2 + x(y-x) - x^2\right]^2 = \left(y^2 + x^2 - 2xy + xy - x^2 - x^2\right)^2 =$
   $\left(y^2 - x^2 - xy\right)^2 = y^4 + x^2y^2 + x^4 - 2xy^3 - 2x^2y^2 + x^3y = 1$ (d'après l'égalité ci-dessus.
   De même calculons $\left(y^2 + y(y+x) - (y+x)^2\right)^2 = \left(y^2 + xy - x^2 - 2xy\right)^2 = \left(y^2 - x^2 - xy\right)^2$ que l'on vient de calculer et qui est égal à 1.
   Si $(x\ ;\ y$ est un couple solution, alors $(y-x\ ;\ x)$ et $(y\ ;\ y+x)$ en sont deux autres
   (b) De de **2. b.** et **3. a.** on en déduit que le couple $(2\ ;\ 3)$ fournit les couples
   $(1\ ;\ 2)$ et $(3\ ;\ 5)$ et que le couple solution $(5\ ;\ 8)$ donne les couples $(3\ ;\ 5)$ (déjà trouvé) et $(8\ ;\ 13)$ solutions.
4. Démonstration par récurrence :

   - Initialisation : le couple $(a_0\ ;\ a_1) = (1\ ;\ 1)$ est solution ;
   - Hérédité : supposons que le couple de rang n, $(a_n\ ;\ a_{n+1})$ soit solution.

De la question **3. a.** il résulte que le couple $(a_{n+1}\ ;\ a_{n+1}+a_n)=(a_{n+1}\ ;\ a_{n+2})$ est aussi solution.
On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, les couples $(a_n\ ;\ a_{n+1})$ sont des couples solutions.
D'après la question **1. b.** les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.
Les premiers nombres de la suite (de Fibonacci) sont 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 13 ; 21 ; ...: deux termes consécutifs sont premiers entre eux.

6 $\mathcal{A}$nalyse

A présent, voici la partie la plus importante du programme: l'analyse. Son coeur est l'analyse réelle de L1 (suites, séries numériques, fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrale sur un intervalle) et l'analyse de L2 (suite de fonctions, séries de fonctions et séries entières, équations différentielles...). On peut aussi trouver dans les programmes des notions plus avancées (Fourier, calcul différentiel et intégrale, équations aux dérivées partielles...), mais ces notions sont hors de propos pour ces révisions.
Le programme d'analyse réelle (L1) couvre aussi bien l'oral 1 (c.f. leçons 51 à 81) que l'écrit. Aussi préparerons-nous, dés le début de l'année, de nombreuses leçons d'oral 1 qui vous serviront énormément dans la préparation aux épreuves écrites! Pour réviser ces cours, je vous conseille les livres de maths-Sup qui sont souvent très efficaces.
Le présent entraînement regroupe un exercice du bac de T.S. ainsi que deux petits problèmes. Le premier concerne la série harmonique et est à savoir parfaitement maîtriser (par coeur!), et le second est un problème sur les séries récurrentes qu'il vous faut travailler avant d'aborder l'année.

6.1 Exercice du Bac sur les suites récurrentes

Débutons simplement cette partie d'analyse par un problème de baccalauréat. A priori, pas de difficulté pour cet exercice bien classique dont les méthodes doivent vous-être naturelles.

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n+v_n}{2} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 4 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} \end{array}\right.$$

1. Calculer $u_1,\ v_1,\ u_2$ et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   (b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).
3. Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à préésent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$.
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

6.2 Petit problème sur la série Harmonique

Un très grand classique qu'il vous faut savoir maîtriser par coeur, tant pour l'écrit que pour l'oral.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Etude de la convergence de la suite $\mathcal{H}_n$:
1.a. Montrer que pour tout entier naturel p strictement positif, $\lim_{n\to+\infty}(\mathcal{H}_{n+p} - \mathcal{H}_n) = 0$.
Est-ce un critère suffisant pour en déduire la convergence de la suite ?
1.b. Montrer que $\mathcal{H}_{2n} - \mathcal{H}_n \geq \frac{1}{2}$.
Est-ce un critère suffisant pour en déduire la divergence de la suite ?

2. Encadrement de la suite $\mathcal{H}_n$.
2.a. Soit k un entier naturel non nul. Montrer que $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.
2.b. En déduire que $\mathcal{H}_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq \mathcal{H}_n$.

3. Comportement asymptotique de $\mathcal{H}_n$:
Donner un équivalent de $\mathcal{H}_n$ en $+\infty$.

4. Etude de la limite de la suite $\mathcal{H}_n - ln(n)$:
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n)$.
4.a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée. On note γ sa limite.

4.b. On définit la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - ln(n+1)$.
Montrer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle est convergente.
4.c. A l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement de γ.

5. Etude d'une somme partielle:
Montrer que $lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = ln(2)$.

6. Etude de $\{\mathcal{H}_n | n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N}$.
6.a. Soit p un entier naturel non nul.
Montrer que $\mathcal{H}_{2p} = \frac{1}{2}\mathcal{H}_p + \frac{a}{2b+1}$, où a et b sont des entiers naturels avec $a \neq 0$.
6.b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\mathcal{H}_n$ est le quotient d'un entier impair et d'un entier pair.
6.c. Quels sont les entiers naturels non nuls n pour lesquels $\mathcal{H}_n$ est un entier ?

6.3 Petit problème sur les suites récurrentes

Un problème du supérieur sur cette thématique, déjà abordée avec l'exercice du Bac. La première partie est savoir faire avant la reprise!!!

Soit I un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application. On appelle *point fixe* de f tout réel $r \in I$ tel que $f(r) = r$.

Comme $f(I)$ est inclus dans I, on peut définir les applications itérées de f par les relations

$$f^0 = \mathrm{Id}_I \ ; \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{p+1} = f \circ f^p,$$

où Id_I désigne l'application identité sur I.

Lorsque f est de classe C^1, on dit qu'un point fixe r de f est *attractif* (resp. *indifférent, répulsif*) si

$$|f'(r)| < 1 \quad (\textit{resp.} \quad |f'(r)| = 1, \ |f'(r)| > 1).$$

Les deux parties du problème sont largement indépendantes. Cependant, on peut utiliser toute question (même sans l'avoir traitée) dans une question ultérieure de la même partie, ou de la partie suivante.

1. Suites récurrentes

1.1. Vérifier que pour tout x_0 de I, la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ x_{n+1} = f(x_n) \qquad \text{(SR1)}$$

définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ x_n = f^n(x_0)$.

La suite donnée par la relation (SR1) s'appelle *suite récurrente* associée à f et à x_0 ou plus briévement suite récurrente. *On suppose dans toute la suite du problème que f est continue sur I.*

1.2. Vérifier que si une suite récurrente converge vers un point de I, elle converge vers un point fixe de f.

1.3. On suppose dans cette question f croissante sur I.
1.3.*a*. Vérifier que toute suite récurrente est alors monotone.
Indication.– On pourra d'abord supposer $x_0 \leq f(x_0)$.
1.3.*b*. En déduire que si I est un intervalle fermé borné, toute suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f.
1.3.*c*. Qu'en est-il si I est un intervalle borné ouvert ou semi-ouvert ou un intervalle non borné (fermé ou non) ? On justifiera soigneusement les réponses.
Indication.– On pourra chercher, le cas échéant, des contre-exemples. Ainsi, pour le cas d'un intervalle borné semi ouvert, on peut étudier $f : I = [0,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$. Pour les autres cas, on s'inspirera de cette première étude.

1.4. On suppose dans cette question f décroissante sur I.
1.4.*a*. Vérifier que, pour toute suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, les suites $(x_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
1.4.*b*. On suppose, pour simplifier, I fermé borné. Etudier l'existence de points fixes de f (existence, nombre). Une suite récurrente converge-t-elle nécessairement, dans ce cas, vers un point fixe de f ?
Indication.– On pourra chercher des exemples ou contre-exemples très simples en considérant le cas $I = [0,1]$.

On suppose désormais que f est de classe C^1 sur I.

1.5. On ne fait pas d'hypothèse particulière sur les variations de f. On suppose, dans cette question, que f possède un point fixe attractif r appartenant à l'intérieur I.

1.5.*a*. Montrer qu'il existe un réel k appartenant à $]0,1[$ et un réel $\eta > 0$ tels que l'intervalle $]r-\eta, r+\eta[$ soit inclus dans I et que

$$\forall x \in]r-\eta, r+\eta[\,, \quad |f(x)-r| \leq k\,|x-r|\,.$$

Indication.– Penser à l'égalité ou à l'inégalité des accroissement finis.
1.5.*b*. En déduire l'existence d'un intervalle J, contenant r en son intérieur, tel que toute suite récurrente de valeur initiale $x_0 \in J$ converge vers r.

1.6. On suppose, dans cette question, que f possède un point fixe r répulsif appartenant à l'intérieur I. La suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeur initiale $x_0 = r$ est constante et converge trivialement vers r. On étudie l'existence d'autres suites récurrentes tendant vers r.
1.6.*a*. En utilisant une méthode analogue à celle de la question 1.5.*a*., montrer qu'il existe un réel $k > 1$ et un réel $\eta > 0$ tels que l'intervalle $]r-\eta, r+\eta[$ soit inclus dans I et que

$$\forall x \in]r-\eta, r+\eta[\,, \quad |f(x)-r| \geq k\,|x-r|\,.$$

1.6.*b*. En déduire, en raisonnant éventuellement par l'absurde, que les seules suites récurrentes tendant vers r sont les suites constantes (et égale à r) à partir d'un certain rang.

2. Orbites périodiques

On appelle *orbite périodique de période* p de f ou bien p*-orbite* de f toute partie G de p éléments incluse dans I telle que :
(H1) $f(G)$ est inclus dans G,
(H2) Si G' est une partie incluse dans G telle que $f(G') \subset G$ alors $G' = \varnothing$ ou $G' = G$.

On considère, dans la suite, G une p*-orbite* de f.

2.1.
2.1.*a*. Vérifier que la restriction σ de f à G est une bijection de G dans G.
Indication.– L'image par f de l'ensemble $G' = f(G)$ est incluse dans G.
2.1.*b*. Soit a un point de G. Montrer que

$$G = \left\{f^k(a)\,,\ \text{avec } 0 \leq k \leq p-1\right\}.$$

Indication.– On pourra, par exemple, rechercher et utiliser la décomposition de σ en cycles.
Vérifier que tout élément de G est un point fixe de l'application f^p.

On suppose désormais f de classe C^1 sur I.

2.2. Déterminer $(f^p)'(a)$ et montrer que ce nombre ne dépend pas du choix de a dans G.
Indication.– On pourra calculer $\left(f^2\right)'(a)$, $\left(f^3\right)'(a)$ et en déduire une formule générale, qu'on démontrera alors par récurrence finie.

Ainsi, on dira que G est *attractive* (resp. *indifférente, répulsive*) si

$$\left|(f^p)'(a)\right| < 1 \ (\textit{resp.}\ \ \left|(f^p)'(a)\right| = 1,\ \left|(f^p)'(a)\right| > 1).$$

2.3. On suppose dans cette question que G est une p-orbite attractive. Soit a un élément de G.
2.3.*a*. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout x_0 appartenant à $]a-\eta, a+\eta[$, la suite $(f^{pm}(x_0))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
2.3.*b*. Dans cette question, on considère x_0 fixé tel que la suite $(f^{pm}(x_0))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
i. Vérifier que, pour tout entier k avec $0 \leq k \leq p-1$, les points $f^k(a)$ sont valeurs d'adhérence de la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$.
ii. Montrer que, réciproquement, toute valeur d'adhérence l de la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est un des $f^k(a)$ pour $0 \leq k \leq p-1$.
Indication.– On écrira que l est limite d'une suite extraite $\left(f^{\varphi(m)}(x_0)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ et on considérera les ensembles $E_k = \{\varphi(m)\,|\,\varphi(m) \equiv k \bmod (p)\}$. Sont-ils tous de cardinal fini ?
2.3.*c*. Déduire des questions précédentes qu'il existe un ensemble U, voisinage de l'orbite G tel que, pour tout x appartenant à U, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à G

6.4 Solution de l'exercice du Bac sur les suites

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 &= 4 \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. $u_1 = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$, $v_1 = \dfrac{\frac{7}{2}+4}{2} = \dfrac{15}{4}$, $u_2 = \dfrac{\frac{7}{2}+\frac{15}{4}}{2} = \dfrac{29}{8}$ et $v_2 = \dfrac{\frac{29}{8}+\frac{15}{4}}{2} = \dfrac{59}{16}$.

2. Soit la suite $w_n = v_n - u_n$.

   (a) Calculons $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} = \dfrac{u_{n+1}+v_n-2u_{n+1}}{2} = \dfrac{v_n-u_{n+1}}{2} = \dfrac{v_n - \frac{u_n+v_n}{2}}{2} = \dfrac{v_n-u_n}{4} = \dfrac{1}{4}w_n$.
   La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   (b) On sait que $w_n = w_0 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$; or $w_0 = 4 - 3 = 1$.
   Donc $w_n = \dfrac{1}{4^n}$.
   Comme la raison $\dfrac{1}{4}$ est comprise entre 0 et 1, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4^n} = 0_+$.

3. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n-u_n}{2} = \dfrac{w_n}{2} > 0$, car la suite (w_n) est positive.
   La suite (u_n) est donc croissante.
   De même $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}+v_n}{2} - v_n = \dfrac{\frac{u_n+v_n}{2} - v_n}{2} = \dfrac{u_n-v_n}{4} = -\dfrac{1}{4}(v_n-u_n) = -\dfrac{1}{4}w_n < 0$.
   La suite (v_n) est donc décroissante.
   D'autre part la différence $v_n - u_n$ égale à w_n a pour limite 0.
   Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles ont donc la même limite ℓ.

4. Soit $t_n = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$.

   (a) On a $t_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = \dfrac{\frac{u_n+v_n}{2} + u_{n+1} + v_n}{3} = \dfrac{u_n+v_n+2v_n+u_n+v_n}{6} = \dfrac{2u_n+4v_n}{6} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} = t_n$.
   La suite (u_n) est donc constante et $t_n = t_0\dfrac{u_0+2v_0}{3} = \dfrac{11}{3}$.

   (b) De $t_n = \dfrac{u_n+2v_n}{3}$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{11}{3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n+2v_n}{3} = \ell$.
   Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{11}{3}$.

6.5 Solution du petit problème sur la série harmonique

1.a. $\mathcal{H}_{n+p} - \mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{n+p}$. Or, $n \leq n+p$, donc $\frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n}$, d'où l'on en déduit:

$$0 \leq \mathcal{H}_{n+p} - \mathcal{H}_n \leq \frac{p}{n}$$

Ainsi, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{p}{n} = 0$, nous en déduisons que $lim_{n\to+\infty}\mathcal{H}_{n+1} - \mathcal{H}_n = 0$.

Ce critère est nécessaire (toute suite convergente le vérifie) mais pas suffisant (cette suite en est un contre-exemple).

1.b. $\mathcal{H}_{2n} - \mathcal{H}_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Pour $k \in \{n+1, \cdots, 2n\}$, nous avons: $k \leq 2n$, et donc $\mathcal{H}_{2n} - \mathcal{H}_n \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

Ce critère est suffisant pour prouver la divergence de la suite. En effet, supposons qu'elle soit convergente et de limite l. Alors, pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, la suite extraite $\mathcal{H}_{\varphi(n)}$ est convergente et admet l pour limite.

Par théorème relatif aux opérations sur les suites convergentes, nous en déduisons que la suite $(\mathcal{H}_{\varphi(n)} - \mathcal{H}_n)$ est une suite convergente, de limite nulle. En prenant $\varphi : n \mapsto 2n$, nous obtenons une contradiction. Aussi la suite $\mathcal{H}_n$ est-elle divergente.

2.a. Evident.

2.b. Soit k entier naturel non nul fixé. En intégrant la précédente relation sur $[k, k+1]$ par rapport à t, nous obtenons:

$$\begin{array}{lll} \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dt & \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt & \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dt \\ \frac{1}{k+1} & \leq \ln(k+1) - \ln(k) & \leq \frac{1}{k} \end{array}$$

En sommant ses relations pour $k \in \{1, 2, \cdots n\}$, nous obtenons:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n} ln(k+1) - ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

$$\mathcal{H}_{n+1} - 1 \leq ln(n+1) \leq \mathcal{H}_n$$

3. En utilisant l'inégalité précédente, nous en déduisons: $\ln(n+1) \leq \mathcal{H}_n \leq \ln(n) + 1$. Ainsi, nous avons:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{\mathcal{H}_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Comme $lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$, nous en déduisons que $\mathcal{H}_n \sim \ln(n)$ en $+\infty$.

4.a. $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + ln(n) = \frac{1}{n+1} - ln(n+1) + ln(n)$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{-1}{t} dt = \int_n^{n+1} \frac{t-(n+1)}{(n+1)t} dt < 0$$

Ainsi, la suite (u_n) est décroissante. Elle est clairement minorée par 0, donc elle converge.

4.b. Pour (v_n), nous obtenons: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+2}{n+1}) = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{t}\right) dt = \int_{n+1}^{n+2} \frac{t-(n+1)}{(n+1)t} dt > 0$. Ainsi, la suite (v_n) est croissante. De plus, puisque pour tout entier $n \geq 1$, $ln(n) \leq ln(n+1)$, nous en déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n \geq u_n$.

Etudions la limite de la différence: $v_n - u_n = ln(n) - ln(n+1) = ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Ces deux suites sont alors adjacentes et ont donc même limite. Ainsi, (v_n) converge vers γ.

4.c. A voir et à faire en TD avec calculatrice. Pour information, une approximation de la constante d'Euler est $\gamma = 0,577215665$.

5. En utilisant les notations de la question 4. nous avons:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_{2n} + ln(2n) - (u_n + ln(n)) = (u_{2n} - u_n) + ln(2)$$

Or, (u_n) est une suite convergente, donc par théorème sur les opérations algébriques sur les limites, on a: $lim_{n\to+\infty} u_{2n} - u_n = 0$, et donc $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

6.a. En remarquant que tous les entiers compris entre 1 et $2p$ sont, soit pairs et ils s'écrivent alors $2k$ avec $k \in \{1, 2, ..., p\}$, soit impairs et s'écrivent alors $2k+1$ avec $k \in \{0, 1, ..., p-1\}$, on en déduit: $\mathcal{H}_{2p} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\mathcal{H}_p + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2k+1}$. Ce dernier terme s'écrit $\frac{N}{D}$ avec D impair (produit de nombres impairs) et N un entier non nul.

6.b. Cela se démontre par récurrence à partir du rang 2 pour initialiser la récurrence.

6.c. $\mathcal{H}_1 = 1$ est le seul terme entier de la série harmonique.

6.6 Solution du petit problème sur les suites récurrentes

1. Suites récurrentes

1.1. On procède par récurrence. Par hypothèse x_0 appartient à I et on a

$$x_0 = \mathrm{Id}_I(x_0) = f^0(x_0).$$

Supposons que, pour $n \geq 0$, x_n soit défini, appartienne à I et que $x_n = f^n(x_0)$. Comme $f(I) \subset I$, $x_{n+1} = f(x_n)$ est défini et

$$x_{n+1} = f(f^n(x_0)) = f \circ f^n(x_0) = f^{n+1}(x_0).$$

Ce qui achève la récurrence.

1.2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente tendant vers un point l de I. Comme la fonction f est continue en l (éventuellement à droite si l est la borne gauche de I, ou à gauche si l est la borne droite de I), la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(l)$. Comme la suite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, on a $f(l) = l$.

1.3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente.
1.3.*a*.

(1) Supposons $x_0 \leq f(x_0)$. Montrons par récurrence que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme $x_0 \leq x_1$ le premier pas est réalisé. Soit $n \geq 0$ et supposons $x_n \leq x_{n+1}$. Comme f est croissante, on a alors

$$x_{n+1} = f(x_n) \leq f(x_{n+1}) = x_{n+2},$$

ce qui achève la récurrence.

(2) Si $x_0 \geq f(x_0)$, un raisonnement analogue montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

1.3.*b*.
(1) Supposons que I soit un intervalle fermé borné $[a,b]$ et que, par exemple, que x_0 soit supérieur ou égal à $f(x_0)$. La suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante et minorée par a, borne gauche de I. Elle converge donc vers un réel $l \geq a$, donc appartenant à I. D'après 1.2., l est alors un point fixe de f.
Si x_0 est inférieur à $f(x_0)$ le raisonnement est analogue, avec la borne droite de I.

(*ii*) Si I est un intervalle ouvert, ou semi-ouvert, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ demeure monotone. On se placera dans le cas ou x_0 est inférieur ou égal à $f(x_0)$ et l'intervalle I ouvert à droite, les autres cas se traitant de manière similaire.

Dans le cas ou I n'est pas borné, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être non majorée : dans ce cas, elle tend vers $+\infty$ et ne converge pas vers un point fixe.

Exemples 1
(1) On prend

$$I =]0,+\infty[\quad \text{et} \quad \forall x \in I, \quad f(x) = x^2$$

et la suite récurrente de valeur initiale $x_0 = 2$. On vérifie facilement (par récurrence) que $x_{n+1} \geq 3x_n$ pour tout $n \geq 1$ et donc que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Ici l'intervalle I est non borné et ouvert.

(2) Une variante de cet exemple consiste à prendre

$$I =]-\infty,+\infty[\quad \text{et} \quad \forall x \in]-\infty,+\infty[, \quad f(x) = x^3.$$

L'application f est croissante la suite récurrente de valeur initiale $x_0 = 2$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Ici l'intervalle I est non borné et fermé.

Dans le cas ou I est borné, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par la borne droite de I. Cette borne n'appartenant pas à I, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger vers cette borne, et donc ne converge pas vers un point fixe de f.

Exemples 2
(1) On prend

$$I = [0,\pi/2[\quad \text{et} \quad \forall x \in I, \quad f(x) = (\pi/2)\sin x,$$

et la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeur initiale $x_0 \in]0,\pi/2[$.
Une étude rapide sur $\mathbb{R}_+$ de l'application $x \mapsto (\pi/2)\sin x$ montre que $f(I) = I$ et qu'on dispose de l'équivalence

$$(x = (\pi/2)\sin x \text{ et } x \in \mathbb{R}_+) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = \pi/2).$$

Le seul point fixe de f est donc 0 ($\pi/2$ n'appartient pas à l'intervalle I). Comme sur $[0,\pi/2[$, on a $f(x) \geq x$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1. Cette suite ne peut converger vers un point de I (sinon ce point serait point fixe). On a donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = \pi/2 \notin I$.

(2) Les données $I = [0,1[$ et : $\forall x \in I, \quad f(x) = \sqrt{x}$, suggérées par le texte, fournissent un exemple encore plus facile à étudier. L'application f est croissante sur I. On vérifie que toute suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeur initiale $x_0 \in]0,1[$ tend vers 1, qui n'est pas un point de I, donc pas un point fixe de f.

1.4.
1.4.*a*. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente
On remarque que la suite $(x_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente associée à l'application $g = f^2$. En effet on a, pour tout $p \geq 0$,

$$x_{2p} = f^{2p}(x_0) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{2p \text{ fois}}(x_0) = \underbrace{f^2 \circ \cdots \circ f^2}_{p \text{ fois}}(x_0).$$

Par ailleurs, si f est décroissante sur I, l'application $g = f^2$ est croissante sur I. On a en effet

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad (\, x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y) \Longrightarrow f(f(x)) \leq f(f(y))\,).$$

La question 1.3.*a*. appliquée à la suite $(x_{2p})_{p\in\mathbb{N}} = (g^p(x_0))_{p\in\mathbb{N}}$, considérée comme suite récurrente associée à l'application g croissante, montre que cette suite est monotone. De même, la suite $(x_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}} = (g^p(x_1))_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite récurrente associée à g et à x_1. Elle est donc monotone.

Remarque.– On peut, tout aussi bien, faire une démonstration par récurrence inspirée de celle du 1.3. Les cas à considérer seront cette fois $x_0 \leq x_2$ et $x_0 \geq x_2$. On remarquera également que la croissance de la suite $(x_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ entraîne la décroissance de la suite $(x_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$.

1.4.*b*. Posons $I = [a,b]$ ($(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$). Comme $f(I)$ est inclus dans I, on a $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$. Le théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction continue $\varphi : x \mapsto f(x) - x$, montre l'existence d'un zéro pour φ dans $[a,b]$ et donc d'un point fixe pour f.
Par ailleurs, soit c et d deux points fixes de f appartenant à I avec, par exemple, $c \leq d$. On a d'une part $f(c) = c \leq d = f(d)$ et d'autre part $f(c) \geq f(d)$ car f est décroissante. Il en résulte $c = d$. L'application f possède donc un point fixe unique sur I.

Remarque.– Lorsque f est supposée dérivable, on peut aussi étudier la fonction φ sur I à l'aide de sa dérivée. On a $\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ sur I, puisque $f'(x) \leq 0$. Donc φ est strictement décroissante et possède un zéro unique sur I.

Une suite récurrente peut ne pas converger vers l'unique point fixe de f. Ceci dépend de la *stabilité* (attractif, indifférent, répulsif) du point fixe.

Exemple 3.– On prend

$$I = [0,1] \quad \text{et} \quad \forall x \in I, \;\; f(x) = 1 - x.$$

et la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeur initiale $x_0 \in [0,1] \setminus \{1/2\}$.
On vérifie facilement que f est strictement décroissante, de classe C^1 et que $r = 1/2$ est son unique point fixe dans I. Comme $f \circ f = \mathrm{Id}_I$, on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \;\; x_{2p} = x_0, \;\; x_{2p+1} = x_1 = 1 - x_0.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence distinctes et donc ne converge pas.

Remarque.– Le lecteur remarquera que les seules propriétés de régularité de f utilisées dans les questions 1.1. à 1.4. sont sa continuité et sa monotonie. L'existence et la continuité de la dérivée n'interviennent que dans la question 1.5. ci-dessous.

1.5.
1.5.*a*. Le point r étant attractif, on a $|f'(r)| < 1$. Comme r appartient à l'intérieur de l'intervalle I, il existe α tel que $]r-\alpha, r+\alpha[$ soit inclus dans I. Comme f est de classe C^1, f' est continue en r : pour $\delta = (1 - |f'(r)|)/2 > 0$, il existe $\eta > 0$, que l'on peut choisir inférieur à α, (de sorte que $]r-\eta, r+\eta[\subset I$) tel que

$$\forall x \in]r-\eta, r+\eta[, \;\; |f'(x) - f'(r)| < \delta = (1 - |f'(r)|)/2,$$

d'où

$$\forall x \in]r-\eta, r+\eta[, \;\; |f'(x)| < (1 + |f'(r)|)/2.$$

On pose alors $k = (1 + |f'(r)|)/2$, qui est strictement inférieur à 1. L'inégalité des accroissements finis appliquée à f dans l'intervalle $]r-\eta, r+\eta[$ donne

$$\forall x \in]r-\eta, r+\eta[, \;\; |f(x) - r| = |f(x) - f(r)| \leq \sup_{y\in]r-\eta,r+\eta[} |f'(y)| \, |x - r| \leq k \, |x - r| . \tag{1}$$

Remarque.– Pour la première partie de la question, on peut, de façon beaucoup plus simple, utiliser le résultat que l'on a redémontré ici : Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et r un point intérieur à I tels que $g(r) < 1$. Alors il existe $\eta > 0$ et $k < 1$ (mais supérieur à $g(r)$) tels que $]r-\eta, r+\eta[\subset I$ et :$\forall x \in]r-\eta, r+\eta[, \;\; g(r) < k$.

1.5.*b*. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente associée à f dont la valeur initiale x_0 appartient à $]r-\eta, r+\eta[$. A partir de la relation (1), on démontre par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in]r-\eta, r+\eta[$ et

$$|x_{n+1} - r| = |f(x_n) - r| \leq k \, |x_n - r| .$$

On en déduit, de nouveau par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; |x_n - r| \leq k^n \, |x_0 - r| .$$

Comme $|k| < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$, puis $\lim_{n\to+\infty} x_n = r$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers r. On pose $J =]r-\eta, r+\eta[$.

Remarque.– Sans hypothèses particulières sur f, si r en est un point fixe, la suite récurrente de valeur initiale $x_0 = r$ est constante et converge vers r. Ici, on met en évidence des suites récurrentes non triviales qui convergent vers un point fixe attractif.

1.6.

1.6.a. Le point r étant répulsif on a $|f'(r)| > 1$. Comme r appartient à l'intérieur de l'intervalle I et que f' est continue il existe des réels $\eta > 0$ et $k > 1$ tels que $]r-\eta, r+\eta[$ soit inclus dans I et

$$\forall x \in \,]r-\eta, r+\eta[\,,\quad |f'(x)| > k.$$

(On utilise ici une variante du résultat rappelé dans la remarque suivant le 1.5a. ci-dessus.) Soit $x \in \,]r-\eta, r+\eta[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe ξ_x compris entre x et r (donc $\xi_x \in \,]r-\eta, r+\eta[$) tel que $f(x) - f(r) = f'(\xi_x)(x-r)$. D'où

$$|f(x) - r| = |f(x) - f(r)| = |f'(\xi_x)|\,|x-r| \geq k\,|x-r|\,.$$

1.6.b. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente associée à f tendant vers r. Il alors existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \,]r-\eta, r+\eta[\,.$$

Ainsi, d'après le 1.6.a., on a : $\forall n \geq n_0$, $|x_{n+1} - r| = |f(x_n) - r| \geq k\,|x_n - r|$. Une récurrence finie montre donc que

$$\forall p \geq 0,\ \ |x_{n_0+p} - r| \geq k^p\,|x_{n_0} - r|\,.$$

Si $x_{n_0} \neq r$, on a $\lim_{p\to+\infty} k^p\,|x_{n_0} - r| = +\infty$ car $k > 1$. Ceci contredit la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers r. C'est donc que $x_{n_0} = r$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à r, à partir du rang n_0.

Remarque.– Ce résultat est le meilleur qu'on peut espérer. Les premiers termes de la suite peuvent être en effet différents de r.

Exemple 4.– On peut construire une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $[0,1] \subset I$, $f(I) \subset I$, prenant la valeur 1 en deux points distincts (0 et 1) et telle que $|f'(1)| > 1$ et fournissant un tel exmple. Par exemple, on peut prendre

$$I = [-1/2, 3/2] \quad \text{et} \quad \forall x \in I,\ \ f(x) = 2\,(1-x)\,x + 1.$$

On vérifie que f prend sur I son minimum en $-1/2$ et $3/2$, que ce minimum est égal à $-1/2$ et son maximum en $1/2$ et que ce maximum est égal à $3/2$. Ainsi $f(I) \subset I$ et $f'(1) = -2$. Le point $r = 1$ vérifie donc les bonnes hypothèses. (Le lecteur vérifiera que le point $r' = -1/2$ eszt un autre point fixe de f et pourra en étudier la nature.) La suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$ vérifie $x_1 = f(x_0) = f(0) = 1$ et : $\forall n \geq 1$, $x_n = 1$. Elle est stationnaire à partir du rang 1.Le lecteur vérifiera que dans cet exemple, il n'y a que deux suites récurrentes tendant vers le point fixe $r = 1$, qui sont la suite donnée ci-dessus et la suite constante égale à 1.

2. Orbites périodiques

2.1. Soit G une orbite périodique de f. Rappelons que l'on a alors (G' désigne une partie de I),

$$f(G) \subset G, \tag{H1}$$

$$(\ G' \subset G \text{ et } f(G') \subset G\ ) \Longrightarrow (\ G' = \varnothing \text{ ou } G' = G\ )\,. \tag{H2}$$

2.1.a. Soit σ la restriction de f à G. On a, en posant $G' = f(G)$,

$$f(G') = f(f(G)) \subset f(G) \subset G.$$

D'après l'hypothèse (H2) on a alors $G' = G$, puisque $G' \neq \varnothing$.

2.1.b. Une application $\psi : G \to G$ telle que $\psi(G) = G$ est une bijection, car G est de cardinal fini : l'application σ est donc une *permutation* de l'ensemble G à p éléments. Elle se décompose en cycles, c'est-à-dire en produit (pour la loi de composition) de permutations dont toutes les orbites sont réduites à un point sauf une. Les supports de chacun de ces cycles, *id est* leur seule orbite non triviale, sont deux à deux disjoints et stable par σ. D'après les hypothèses (H1) et (H2), la seule partie stable par σ non vide étant G elle même, σ possède un et un seul cycle, de longueur p. Pour tout $a \in G$, on a alors

$$G = \left\{\sigma^k(a)\,,\ \text{avec } 0 \leq k \leq p-1\right\} = \left\{f^k(a)\,,\ \text{avec } 0 \leq k \leq p-1\right\}, \tag{O3}$$

avec $\sigma^k(a) = f^p(a) = a$.

Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq p-1$. On a $f^{kp}(a) = (f^p)^k(a) = a$ et donc tout élément de G est un point fixe de l'application f^p.

Remarque.– On peut être surpris de l'intrusion d'une question aussi *algébrique* dans un texte d'analyse : les mathématiques sont un tout et les apports sont enrichissants entre ses différentes branches. Cet exemple montre qu'il est bon d'avoir en tête l'algèbre élementaire, pour aborder un problème d'analyse, même s'il est possible dans ce cas précis de se "débrouiller" autrement. Voici en bref comment. On considère l'ensemble

$G' = \left\{\sigma^k(a), k \in \mathbb{N}\right\}$. On vérifie (par exemple par récurrence sur k) que cet ensemble est stable par σ et inclus dans G. Il est donc égal à G d'après l'hypothèse (H2). C'est donc qu'il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma^l(a) = a$. On démontre ensuite que $l = p$ et que $\sigma^i(a) \neq \sigma^j(a)$ pour $0 \leq i \neq j \leq p-1$. On retrouve donc la propriété (O3).

2.2. On a $\left(f^2\right)'(a) = f'(f(a))\, f'(a)$ puis

$$\left(f^3\right)'(a) = \left(f \circ f^2\right)'(a) = f'\left(f^2(a)\right)\left(f^2\right)'(a) = f'\left(f^2(a)\right) f'(f(a))\, f'(a).$$

Ceci suggère la formule générale

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left(f^k\right)'(a) = \prod_{j=0}^{k-1} f'\left(f^j(a)\right),$$

que l'on va démontrer par récurrence. Le résultat est vrai pour $k = 1, 2$ et supposons le vrai pour k entier supérieur ou égal à 2. On a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \left(f^{k+1}\right)'(a) = \left(f \circ f^k\right)'(a) = f'\left(f^k(a)\right)\left(f^k\right)'(a) =$$
$$f'\left(f^k(a)\right) \prod_{j=0}^{k-1} f'\left(f^j(a)\right) = \prod_{j=0}^{k} f'\left(f^j(a)\right),$$

ce qui achève la récurrence.

On a en particulier $(f^p)'(a) = \prod_{j=0}^{p-1} f'\left(f^j(a)\right) = \prod_{x \in G} f'(x)$, ce qui prouve l'indépendance de $(f^p)'(a)$ vis-à-vis du choix de $a \in G$.

2.3.
2.3.a. Sous l'hypothèse faite, a est un point fixe attractif de l'application $h = f^p$. En appliquant la question 1.5. à h, on obtient l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout x appartenant à $]a-\eta, a+\eta[$, la suite $(h^m(x_0))_{m\in\mathbb{N}} = (f^{pm}(x_0))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

2.3.b. Soit x_0 fixé tel que la suite $(f^{pm}(x_0))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
i. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq p-1$. On a, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$f^{pm+k}(x_0) = f^k\left(f^{pm}(x_0)\right).$$

Comme la suite $(f^{pm}(x_0))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers a et que la fonction f^k est continue (comme composée de fonctions continues) la suite $\left(f^{pm+k}(x_0)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^k(a)$. La suite $\left(f^{pm+k}(x_0)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ étant extraite de la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$, $f^k(a)$ est valeur d'adhérence de la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$.
ii. Soit l une valeur d'adhérence l de la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $l = \lim_{m\to+\infty} f^{\varphi(m)}(x_0)$. Les p ensembles

$$E_k = \{\varphi(m) \mid \varphi(m) \equiv k \bmod (p)\} \qquad (0 \leq k \leq p-1),$$

forment une partition de l'ensemble $E = \varphi(\mathbb{N})$, qui est de cardinal infini, φ étant une injection strictement croissante. Un des ensembles E_k au moins est donc de cardinal infini. Notons k_0 l'indice correspondant. On peut alors former une suite extraite $\left(f^{\psi(j)}(x_0)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ de la suite $\left(f^{\varphi(m)}(x_0)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \ \psi(j) \in E_{k_0},$$

ou encore $\psi(j) = pn_j + k_0$. La suite $(f^{pn_j}(x_0))_{j\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite $(f^{pn}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a et donc, d'après le raisonnement précédent

$$\lim_{j\to+\infty} f^{\psi(j)}(x_0) = \lim_{j\to+\infty} f^{pn_j+k_0}(x_0) = f^{k_0}(a).$$

Comme la suite $(f^{pn_j}(x_0))_{j\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $\left(f^{\varphi(m)}(x_0)\right)_{m\in\mathbb{N}}$, elles ont mêmes limites. D'où $l = f^{k_0}(a)$.

2.3.c. D'après le 2.3.a., on peut choisir, pour tout a appartenant à G, un réel $\eta_a > 0$ tel que pour tout $x_0 \in]a-\eta_a, a+\eta_a[$, la suite récurrente $(f^{pm}(x_0))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers a. D'après le 2.3.b., les valeurs d'adhérence de $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ sont alors les points de G.
Posons

$$U = \bigcup_{a\in G}]a-\eta_a, a+\eta_a[.$$

Cet ensemble est clairement ouvert, voisinage de l'ensemble (fini) G.

Par choix de U, il est clair que, pour tout x appartenant à U, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à G.

7 $\mathcal{A}$nnales du Capes 2008

Enfin, nous terminons ces révisions par les sujets du Capes 2008. À présent, il vous faut planifier 5h consécutives pour vous entraîner sur chacun des deux sujets. N'oubliez pas qu'il s'agit d'un concours: vous êtes admissibles si vous rendez une copie (un peu) meilleure que celle des autres. Donc finalement, peu doit vous importer la difficulté du sujet: il vous faut faire mieux que les autres! Nous ferons durant l'année de préparation de nombreux entraînements de 5h le samedi matin: aussi prévoyez dès à présent d'être libre cette demie-journée car cela constitue la meilleure préparation que de s'entraîner sur des sujets. Vous aurez des sujets de difficultés différentes, et vous devrez mettre en place des stratégies personnelles: si le sujet est accessible, il vous faut aller vite, répondre vite et bien à de nombreuses questions (parfois plus vite que bien, mais c'est plus rentable). A l'extrème inverse, lorsque le sujet est hermétique, il vous faudra patiemment tenter de comprendre les notations, les notions, avancer pas-à-pas, rédiger extrèmement bien les questions que vous faîtes (tout le monde répond aux mêmes questions, mais vous devez faire mieux que les autres, donc au niveau de la rédaction)... La vitesse de réponse n'est plus ici décisive, alors que la persévérance ainsi qu'une intelligence du sujet (arriver à comprendre des résultats que l'on arrive pas à démontrer pour faire des questions plus loin) vous seront utiles.
Bon courage pour ces premières annales!