Exercice d'arithmétique
Déclic TS

Exercice 1: Diviseurs et raisonnement (exo 43-44-45 page 459)

1. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n, 6 divise $n^3 + 5n$.
2. Démontrer le résultat précédent en remarquant que $5 \equiv -1 \mod 6$, puis que $n^3 + 5n \equiv n(n-1)(n+1) \mod 6$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Exercice 2: Nombre de diviseurs d'un entier (exo 57 page 460)

On considère un entier naturel $n \geqslant 2$ et sa décomposition en facteur premier $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_m^{\alpha_m}$ où $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont des nombres premiers tels que $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont des entiers naturels non nuls.
Soit d un diviseur de n.

1. Justifier que si un nombre premier p divise d, alors $p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$.
2. Justifier que si p_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ figure dans la décomposition de d en facteurs premiers, alors son exposant est inférieur ou égal à α_i.
3. En déduire que d est de la forme $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \ldots \times p_m^{\beta_m}$ avec pour tout entier i compris entre 1 et m, $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$.
4. Montrer alors que le nombre de diviseurs de n est égal à $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_m + 1)$.

Exercice 3 (exo 59 page 461)

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a^2 - b^2$ est premier. Montrer que a et b sont deux entiers consécutifs.

Exercice 4: Reste de la division euclidienne (exo 89 page 464)

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $5^{3n} - 6^n$ par 17.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 39^{60} par 7.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2012^{2012} par 11.

Exercice 4: Rep-unit (exo 90+96 page 464)

Un rep-unit (répétition de l'unité) est un entier qui est formé uniquement de 1. Par exemple 1 111 111 est un rep-unit.

1. (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 1 111 111 par 5, par 9 et par 11.
   (b) En déduire le reste de la division euclidienne de $(1\ 111\ 111)^8$ par 5, 9 et 11.
2. On désigne par N_k le rep-unit $N_k = \underbrace{111\ldots1}_{k\ chiffres} = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i$.
   (a) A l'aide du logiciel XCas, écrire la décomposition en facteurs premiers de N_k pour $2 \leqslant k \leqslant 9$.
   A quelle condition sur k pouvez-vous conjecturer que N_k est divisible par 3? Par 9 ?
   Prouver cette conjecture.
   (b) Soit n un entier naturel tel que $n > 1$. On suppose de plus que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1.
      i. Montrer que, dans ce cas, le chiffre des unités de n est 1 ou 9.
      ii. En remarquant qu'un entier se terminant par 1 ou 9 s'écrit sous la forme $10p + 1$ ou $10p - 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, montrer que $n^2 \equiv 1 \mod 20$.
      iii. Pour tout entier $k \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de N_k par 20.
      iv. En déduire que 1 est le seul rep-unit qui soit un carré parfait.

Exercice 5: Critère de divisibilité par 11 (exo 104 page 167)

Partie A

1. On suppose que l'écriture décimale d'un entier x est $\overline{ab}$ avec $a \neq 0$, c'est-à-dire que $x = 10a + b$.
   On note $y = \overline{ba}$ l'entier obtenu en intervertissant les chiffres de a.
   Montrer que $x + y$ est divisible par 11.

2. Un entier x comportant quatre chiffres s'écrit dans le système décimal $\overline{abcd}$, avec $a \neq 0$. Démontrer que $x \equiv 0 \mod 11$ si et seulement si $-a+b-c+d \equiv 0 \mod 11$.

3. En déduire que les entiers à quatre chiffres dont l'écriture décimale est de la forme $\overline{abba}$ avec $a \neq 0$ sont divisibles par 11.

Partie B

On considère un entier a défini par son écriture décimale $a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$, avec $a_n \neq 0$. On dira que le rang du chiffre a_k est égal à k.

1. Démontrer qu'un entier est divisible par 11 si et seulement si la somme de ses chiffres de rang pair diminuée de la somme de ses chiffres de rang impair est divisible par 11.

2. L'entier 15 374 876 926 816 est-il divisible par 11?

3. Déterminer les multiples de 11 compris entre 1000 et 9999 dont la somme des chiffres est égale à 11.

Exercice 6: Nombres amiables (exo 111 page 469)

Deux nombres sont dit *amiables* lorsque la somme des diviseurs positifs propres de l'un est égal à l'autre, ou encore lorsque les sommes de tous leurs diviseurs positifs sont égales.

1. Vérifier que 220 et 284 sont amiables.

   Dans la suite, on pose pour tout entier naturel n non nul $a = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $b = 3 \times 2^n - 1$, $c = 9 \times 2^{2n-1} - 1$, $A = 2^n \times a \times b$ et $B = 2^n \times c$. Le savant arabe Thabit ibn Qurra (826-901) a démontré que si a, b et c sont premiers, alors A et B sont amiables.

2. (a) Vérifier que les nombres 220 et 284 sont de la forme A et B.
   (b) Montrer que 1 184 et 1 210 sont amiables (on utilisera un programme pour obtenir tous les diviseurs d'un entier naturel). Ces entiers sont-ils de la forme A et B ?
   (c) Calculer a, b et c pour $n = 4$ et vérifier qu'ils sont premiers (on utilisera un programme testant la primalité). Calculer la paire de nombre amiable A et B obtenue.
   (d) Même question avec $n = 7$.

3. Tous les diviseurs considérés sont positifs. On suppose que a, b et c sont premiers. Comme a et b sont distincts, les écritures $A = 2^n \times a \times b$ et $B = 2^n \times c$ sont les décompositions en facteurs premiers de A et B.
   (a) Les entiers $1; 2; \dots; 2^n; c; 2C; 2^2c; \dots; 2^nc$ sont des diviseurs de B: justifier qu'il n'y en a pas d'autres.
   (b) Etablir de même la liste des diviseurs de A.
   (c) Montrer que la somme S_B des diviseurs de B est égale à $(1+c)(2^{n+1}-1)$.
   (d) Montrer que la somme S_A des diviseurs de A est égale à $(1+a+b+ab) \times (2^{n+1}-1)$.
   (e) En utilisant l'expression de a, b, c en fonction de n, montrer que $S_A = S_B$ et conclure.

Exercice 8: Nombres parfaits pairs (exo 112 page 469)

On dit qu'un entier naturel est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autre que lui-même. Par exemple 6 est parfait puisque l'ensemble de ses diviseurs est $\{1, 2, 3, 6\}$ et donc la somme de ses diviseurs autres que lui-même est égale à $1+2+3=6$.

1. Le but de cette question est de montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ est parfait. Notons q l'entier premier $q = 2^p - 1$.
   (a) Ecrire la liste des diviseurs de N (on remarquera que l'écriture connue de N est sa décomposition en facteurs premiers).
   (b) Montrer que N est parfait.

2. Soit N un nombre parfait pair. En notant n l'exposant de 2 dans la décomposition de N en facteurs premiers, on peut écrire $N = 2^n q$ où q est impair. On note $s(N)$ la somme des diviseurs de N (N étant parfait, nous avons $s(N) = 2N$), et $s(q)$ la somme des diviseurs de q.
   (a) En remarquant que chaque diviseur d de q engendre $n+1$ diviseur de N: $d, 2d, \dots, 2^n d$, montrer que
   $$s(N) = (1+2+2^2+\dots+2^n) \times s(q), \quad \text{puis que} \quad 2N = (2^{n+1}-1) \times s(q).$$

(b) En notant σ la somme des diviseurs de q autre que q, déduire de la question précédente que $q = \sigma(2^{n+1} - 1)$.

(c) En déduire que $\sigma = 1$, puis que q est premier égal à $2^{n+1} - 1$.

3. Conclure.

Exercice 9: Astronomie et équation diophantienne (exo 74 page 499)

Le 27 décembre 2011, un astronome a observé le corps céleste A dont la fréquence d'apparition est 105 jours. Le 2 janvier 2012, ce même astronome a vu le corps céleste B qui apparaît tous les 81 jours. L'astronome veut connaître la date de la prochaine apparition simultanée des deux corps.

On note x le nombre de jours séparant la date cherchée du 27 décembre 2011.

1. Montrer qu'il existe des entiers u et v tels que $\begin{cases} x = 105u \\ x - 6 = 81v \end{cases}$

2. Vérifier que u et v sont tels que $35u - 27v = 2$.

3. (a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer un couple d'entiers solution de l'équation $35x - 27y = 1$.

   (b) En déduire une solution particulière $(u_0; v_0)$ de l'équation $35u - 27v = 2$.

4. En remarquant que $35u - 27v = 2$ équivaut à $35(u - u_0) = 27(v - v_0)$, déterminer toutes les solutions de l'équation $35u - 27v = 2$.

5. Conclure.

Exercice 10 Suite et arithmétique (exo 76 page 499)

1. (a) Calculer $(1 + \sqrt{6})^2$, $(1 + \sqrt{6})^4$, $(1 + \sqrt{6})^6$.

   (b) Appliquer l'algorithme d'Euclide aux entiers 847 et 342. Que peut-on déduire de ces deux entiers ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a_n et b_n les entiers naturels tels que $(1 + \sqrt{6})^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

   (a) Quelles sont les valeurs de a_1 et b_1 ? De a_2 et b_2?

   (b) Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3. (a) Démontrer que 5 ne divise pas $a_n + b_n$ alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

4. (a) Démontrer que si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont également premiers entre eux.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 11 Nombres de Carmiochael (exo 78 et 78 page 500)

Partie A

D'après le petit théorème de Fermat, si p est un entier premier, alors pour tout entier a premier avec p, nous avons $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

La réciproque de ce théorème est fausse: nous allons en effet démontrer ici l'existence de nombres entiers naturels p non premiers vérifiant l'hypothèse, pour tout entier a premier avec p, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Ces nombres sont appelés nombres de Carmichael (mathématicien américain, 1879-1967). Supposons qu'il existe un entier n tel que $n = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ où $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et qui sont tels que, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $(p_i - 1)$ divise $(n - 1)$.

1. Vérifier que l'entier n n'est pas premier.

2. On considère à présent un entier a premier avec n.

   (a) Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, \ldots, k\}$, l'entier a n'est pas divisible par p_i.

   (b) En déduire que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant k$, l'entier $a^{p_i - 1} \equiv 1 \mod p_i$.

   (c) En utilisant l'hypothèse *pour tout entier* $i \in \{1, \ldots, k\}$, $(p_i - 1)$ *divise* $(n - 1)$, démontrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $a^{n-1} \equiv 1 \mod p_i$.

3. (a) Démontrer que $a^{n-1} \equiv 1 \mod n$.

   (b) En déduire que n est un nombre de Carmichael.

4. Montrer que 561 est un nombre de Carmichael.

Partie B

On admet le théorème suivant, dû au mathématicien allemand Korselt:

Un entier naturel n supérieur à 1 et non premier est un nombre de Carmichael si et seulement si pour tout entier premier p divisant n, on a p^2 ne divise pas n et $(p-1)$ divise $(n-1)$.

1. (a) Ecrire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 561, 1 105 et 1 729.
   (b) A l'aide du théorème précédent, vérifier que se sont des nombres de Carmichael.

   Ces trois entiers sont les trois plus petits nombres de Carmichael.

2. Soit n un nombre de Carmichael et p l'un de ses facteurs premiers.
   (a) Montrer que $p \equiv 1 \mod p-1$, puis que $n \equiv 1 \mod p-1$.
   (b) En écrivant n sous la forme $\left(\frac{n}{p}\right) \times p$, vérifier que $\frac{n}{p}$ est un entier et démontrer que $\frac{n}{p} \equiv 1 \mod p-1$.
   (c) En déduire que si p est un facteur premier d'un nombre de Carmichael, alors le produit des autres facteurs premiers est congru à 1 modulo $(p-1)$.

3. A l'aide de la question précédente, démontrer qu'un nombre de Carmichael ne peut pas être le produit de deux nombres premiers.

4. Démontrer que tout nombre de Carmichael est impair.

Exercice 13: Indicateur d'Euler (exo 81 page 501)

On considère un entier n supérieur ou égal à 2 et l'ensemble $S_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. On considère également la décomposition en produit de facteurs premiers de l'entier n sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$ où l'on a $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$.

Le but de cet exercice est d'établir un résultat, dont la généralisation sera admise, qui permet de déterminer le nombre d'entiers de S_n qui sont premiers avec n. On appelle $\varphi(n)$ ce nombre.

1. Dans cette question, on pose $n = 12$. On a donc $S_{12} = \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$. On prend au hasad, de manière équiprobable, un des entiers de cet ensemble, on appelle X la variable aléatoire égale à la valeur choisie. On a donc par exemple $P(X = 5) = \frac{1}{12}$.
   (a) Ecrire la décomposition en produit de facteurs premiers de 12.
   (b) On nomme A l'évènement *l'entier prélevé est un multiple de* 2 et B l'évènement *l'entier prélevé est un multiple de* 3. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
   (c) Quelle est la valeur de $\varphi(12)$? On note E l'évènement *l'entier prélevé est premuier avec* 12. Calculer $P(E)$.

2. On considère un entier naturel et l'on suppose que sa décomposition en facteurs premiers est $n = p^\alpha \times q^\beta$, où α et β sont des entiers naturels non nuls.

   Comme dans la question **1.** on prend un entier au hasard et de manière équiprobable dans l'ensemble $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre prélevé. On nomme C l'évènement *l'entier prélevé est un multiple de* p, D l'évènement *l'entier prélevé est un multiple de* q, et F l'évènement *l'entier prélevé est premier avec* n.
   (a) Combien y a-t-il de multiples de p appartenant à S_n ? En déduire que $P(C) = \frac{1}{p}$.
   (b) Calculer $P(D)$.
   (c) Démontrer l'équivalence suivante: p et q étant des nombres distincts, $p|a$ et $q|a$ si et seulement si $pq|a$.
   (d) Quel est l'évènement $C \cap D$? Combien a-t-il d'éléments ? Calculer $P(C \cap D)$.
   (e) En déduire que C et D sont des évènements indépendants.
   (f) Justifier que $F = \overline{C} \cap \overline{D}$.
   (g) Déduire des questions précédents que $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$.

Ce résultat se généralise à tout nombre entier supérieur ou égal à 2 ayant une décomposition en facteurs premiers de la forme $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_m^{\alpha_m}$. On admettra le résultat

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right).$$

La fonction ainsi définie est appelée *indicatrice d'Euler*.